2023年高中毕业年级第一次质量预测

理科数学　评分参考

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	C	C	D	A	B	D	C	B	B	B

二、填空题

13. -80;　　14. $\dfrac{40}{9}$;　　15. $x^2+y^2+x-y-2=0$;　　16. $(4,\ \ 5)$.

三、解答题

17.（1）由题意 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=n-2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$.（2 分）

当 $n=1$ 时，$a_1=0$；（3 分）

当 $n\geq 2$ 时，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=n-3+\dfrac{1}{2^{n-2}}$,

两式相减得 $\dfrac{a_n}{2^n}=n-2+\dfrac{1}{2^{n-1}}-(n-3+\dfrac{1}{2^{n-2}})=1-\dfrac{1}{2^{n-2}}$，（4 分）

所以 $a_n=2^n-2$，当 $n=1$ 时也成立.（6 分）

（2）根据题意，得 $b_n=a_n\cdot\cos n\pi=(2^n-2)\cos n\pi=\begin{cases}2-2^n, n\text{为奇数}\\ 2^n-2, n\text{为偶数}\end{cases}$（7 分）

所以 $T_{2n}=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{2n-1}+b_{2n}$

$=(-2^1+2^2-2^3+\ldots-2^{2n-1}+2^{2n})+(2-2+2-\ldots-2+2)$（9 分）

$=-2^1+2^2-2^3+\ldots-2^{2n-1}+2^{2n}=\dfrac{-2[1-(-2)^{2n}]}{1-(-2)}=\dfrac{2\cdot 4^n-2}{3}$.（12 分）

18.（1）连接AC、BD交于O，以O为坐标原点，OA、OB、OP为x，y，z轴建立空间直角坐标系.

$A(\sqrt{2},0,0),B(0,\sqrt{2},0),P(0,0,2),C(-\sqrt{2},0,0),D(0,-\sqrt{2},0)$，

$E(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},0),F(0,\frac{\sqrt{2}}{2},1),\ \overrightarrow{AE}=(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1),\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1),$ （2 分）

又 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$，得 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=(-\frac{4}{3}\sqrt{2},0,\frac{4}{3})$,（4分）

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=(-2\sqrt{2},0,2)$, 所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$，A、M、E、F四点共面，即点M在平面AEF内.（6分）

（2）$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{2},-2)$，设平面 AEF 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$ 得，$\vec{n}=(1,0,\sqrt{2})$，（8分）

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{PB},\vec{n}\right\rangle=\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}$，所以直线 PB 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.（12分）

19.（1）由题意知，$X\sim B(5,\frac{1}{2})$，X 可能的取值为0，1，2，3，4，5，（2分）

$P(X=0)=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$，$P(X=1)=C_5^1(\frac{1}{2})^5=\frac{5}{32}$，

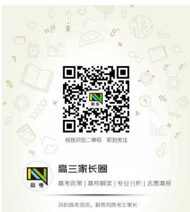
$P(X=2)=C_5^2(\frac{1}{2})^5=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$，$P(X=3)=C_5^3(\frac{1}{2})^5=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$，

$P(X=4)=C_5^4(\frac{1}{2})^5=\frac{5}{32}$，$P(X=5)=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$.（4分）

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$E(X)=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.（6分）



（2）设“第四轮点球结束时，乙队进了4个球并胜出”为事件A，

由题意知，甲乙两队比分为1：4或2：4，设“甲乙两队比分为1：4”为事件 A_1，“甲乙两队比分为2：4”为事件 A_2，

若甲乙两队比分为1：4，则乙射进4次，甲前三次射进一次，第4次未进，

$P(A_1)=C_3^1(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^4=\frac{1}{27}$（8分）

若甲乙两队比分为2：4，则乙射进4次，甲前四次射进两次，

$P(A_2)=C_4^2(\frac{1}{2})^4\cdot(\frac{2}{3})^4=\frac{2}{27}$,（9分）

所以 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{27}+\frac{2}{27}=\frac{1}{9}$.（10分）

即在第四轮点球结束时，乙队进了4个球并胜出的概率为 $\frac{1}{9}$.（12分）

20.（1）由题设得 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a^2=6,b^2=3$.（3 分）

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.（5 分）

（2）设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 得

$\left(1+2k^2\right)x^2+4kmx+2m^2-6=0$.（6 分）

于是 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$.（7 分）

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $D(-x_1,-y_1)$，

$k_{PA}\cdot k_{PD}=\frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{y_1+1}{x_1+2}=\frac{{y_1}^2-1}{{x_1}^2-2}=-\frac{1}{2}$，又 $k_1\cdot k_2=\frac{1}{2}$，所以 $k_{PA}=-k_2$.（8 分）

即 $k_{PA}+k_{PB}=0$. $\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=0$，即 $(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)=0$，

$(kx_1+m-1)(x_2-2)+(kx_2+m-1)(x_1-2)=0$，

$2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)=0$，将 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}$

代入整理得 $2k^2-3k+1+mk-m=0$，即 $(k-1)(2k-1+m)=0$，（10 分）

当 $2k-1+m=0,m=1-2k$，直线 $y=kx+m$ 过点 $P(2,1)$，舍去，所以 $k=1$.（12 分）

21.(1) $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$,

所以在 $(-\pi,-\dfrac{\pi}{2})$，$(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，（2 分）

在 $(-\dfrac{\pi}{2}$，$0)$，$(\dfrac{\pi}{2}$，$\pi)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，（3 分）

所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $(-\pi,-\dfrac{\pi}{2})$，$(0,\dfrac{\pi}{2})$，单调递减区间为 $(-\dfrac{\pi}{2}$，$0)$，$(\dfrac{\pi}{2}$，$\pi)$.（5 分）

（2）设 $F(x)=x\sin x+\cos x-a(x^2+1),x\in[0,\pi]$,

$F'(x)=x\cos x-2ax=x(\cos x-2a)$,（6 分）

当 $2a\le -1$，即 $a\le -\dfrac{1}{2}$ 时，$F'(x)\ge 0$，$F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，（7分）

$F_{\max}(x)=F(\pi)=-1-a(\pi^2+1)\ge 0$，$a\le -\dfrac{1}{\pi^2+1}$，所以 $a\le -\dfrac{1}{2}$ 成立；

当 $2a\ge 1$，即 $a\ge \dfrac{1}{2}$ 时，$F'(x)\le 0$，$F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，$F_{\max}(x)=F(0)=1-a\ge 0$，$a\le 1$，

所以 $\dfrac{1}{2}\le a\le 1$；（8分）

当 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$\exists x_0\in(0,\pi),\cos x_0=2a$，当 $x\in(0,x_0),\cos x>2a,F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0,\pi),\cos x<2a,F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，（9分）

$F_{\max}(x)=F(x_0)=x_0\sin x_0+\cos x_0-a({x_0}^2+1)=x_0\sin x_0+\cos x_0-\dfrac{1}{2}\cos x_0({x_0}^2+1)$,

$=x_0\sin x_0+\dfrac{1}{2}\cos x_0-\dfrac{{x_0}^2}{2}\cos x_0$,

令 $\varphi(x)=x\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{x^2}{2}\cos x,x\in(0,\pi)$,

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x^2}{2}\sin x>0$，所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$， $F(x_0)\geq 0$ 成立.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.（12分）

22.（1）曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos\alpha}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}, \end{cases}$ (α 为参数，$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$)，

所以 $x^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$，所以 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

即曲线 C 的普通方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.（3 分）

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\rho\left(\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，

转换为直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$.（5 分）

（2）直线 l 过点 $P(2,0)$，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\dfrac{1}{2}t, \end{cases}$（$t$ 为参数）

令点 A，B 对应的参数分别为 t_1， t_2，

由 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，得 $2t^2+6\sqrt{3}t+9=0$，

则 $t_1+t_2=-3\sqrt{3}$， $t_1t_2=\dfrac{9}{2}$，（8 分）

故 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.（10 分）

23.（1）①当 $x\leq -1$ 时， $1-3x\leq 5\Rightarrow x\geq -\dfrac{4}{3}$，解得 $-\dfrac{4}{3}\leq x\leq -1$；

②当 $-1<x\leq 3$ 时， $x+5\leq 5\Rightarrow x\leq 0$，解得 $-1<x\leq 0$；

③当 $x>3$ 时， $3x-1\leq 5\Rightarrow x\leq 2$，无解，

综上：不等式的解集为$\left\{x\middle|-\dfrac{4}{3}\le x\le 0\right\}$．（5 分）

（2）因为$f\left(x\right)=2\left|x+1\right|+\left|x-3\right|=\left|x+1\right|+\left|x-3\right|+\left|x+1\right|\ge\left|x+1-x+3\right|+0=4$，

当且仅当$x=-1$时等号成立.

所以$m=4$，即$a+b+c=m=4$，

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{8}\left[\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(c+a\right)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\right)$$

$$\ge\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\left(2\sqrt{\frac{b+c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{b+c}}+2\sqrt{\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{b+c}}+2\sqrt{\frac{a+b}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}\right)=\frac{9}{8},$$

当且仅当$a+b=b+c=c+a$，即$a=b=c=\dfrac{4}{3}$时，等号成立．（10 分）