郑州市2023年高中毕业年级第一次质量预测
文科数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x+y|x\in B, y\in B\}$，$B=\{0,1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\varnothing$

2. 若 $z=1+2i+i^3$，则 $|z|=$

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则"$\lg a+\lg b=0$"是"$ab=1$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=24$，则 $S_5=$

A. 32　　B. 31　　C. 63　　D. 64

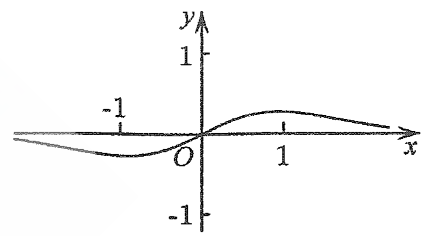
5. 将2个1和3个0随机排成一行，则2个1不相邻的概率为

A. 0.3　　B. 0.5　　C. 0.6　　D. 0.8

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作直线交抛物线于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点，若 $x_1+x_2=4$，则 $|AB|$ 的值为

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

7. 已知函数 $f(x)=e^x+e^{-x}$，$g(x)=\sin x$，下图可能是下列哪个函数的图象



A. $f(x)+g(x)-2$

B. $f(x)-g(x)+2$

C. $f(x)\cdot g(x)$

D. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，下列说法正确的是

A. 若 $\omega=2$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上存在零点

B. 若 $\omega=2$，则将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，所得图象关于原点对称

C. 若函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{2\pi}{3}$ 上取到最大值，则 ω 的最小值为 $\frac{1}{4}$

D. 若函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上存在两个最值，则 ω 的取值范围是 $3<\omega\leqslant 5$

9. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且 $f(1+x)=f(1-x)$. 若 $f(-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$，则 $f(\frac{11}{3})=$

A. $-\frac{5}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 DP 与 B_1C 所成的角为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

11. 设 F_1,F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的左、右焦点，Q 为双曲线右支上一点，点 $P(0,2)$. 当 $|QF_1|+|PQ|$ 取最小值时，$|QF_2|$ 的值为

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}-2$　　D. $\sqrt{6}+2$

12. 已知 $a<5$ 且 $ae^5=5e^a$，$b<4$ 且 $be^4=4e^b$，$c<3$ 且 $ce^3=3e^c$，则

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}|$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x},x\leqslant 0,\\1,x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是________.

15. 已知圆柱的两个底面的圆周在体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的球 O 的球面上，则该圆柱的侧面积的最大值为________.

16. "外观数列"是一类有趣的数列，该数列由正整数构成，后一项是前一项的"外观描述". 例如：取第一项为 1，将其外观描述为"1 个 1"，则第二项为 11；将描述为"2 个 1"，则第三项为 21；将 21 描述为"1 个 2，1 个 1"，则第四项为 1211；将 1211 描述为"1 个 1，1 个 2，2 个 1"，则第五项为 111221，…，这样每次从左到右将连续的相同数字合并起来描述，给定首项即可依次推出数列后面的项. 则对于外观数列 $\{a_n\}$，下列说法正确的有________.

①若 $a_1=3$，则从 a_4 开始出现数字 2；

②若 $a_1=k(k=1,2,3,\cdots,9)$，则 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的最后一个数字均为 k；

③$\{a_n\}$ 不可能为等差数列或等比数列；

④若 $a_1=123$，则 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$"均不包含数字 4.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）

自主创新是我国经济发展的核心动力，科技自立自强已被赋予国家发展战略支点的功能. 目前实现科技自立自强我们仍面临巨大挑战，越来越多的企业主动谋划、加快发展，推动我国科技创新迈上新台阶. 某企业拟对某芯片进行科技升级，根据市场调研与模拟，得到科技升级投入 x（亿元）与科技升级直接收益

y（亿元）的数据统计如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7
x	2	3	4	6	8	10	13
y	13	22	31	42	50	56	58

根据表格中的数据，建立了 y 与 x 的两个回归模型：模型①：$\hat{y}=4.1x+11.8$；模型②：$\hat{y}=21.3\sqrt{x}-14.4$.

（Ⅰ）根据下列表格中的数据，比较模型①、②的相关指数的大小，并选择拟合精度更高、更可靠的模型；

（Ⅱ）根据（Ⅰ）选择的模型，预测对芯片科技升级的投入为 17 亿元时的直接收益.

回归模型	模型①	模型②
回归方程	$\hat{y}=4.1x+11.8$	$\hat{y}=21.3\sqrt{x}-14.4$
$\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\hat{y}_i)^2$	182.4	79.2

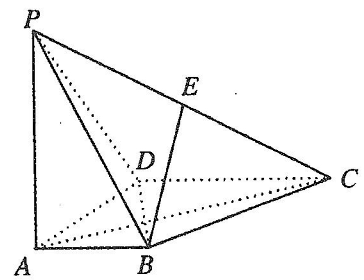
（附：刻画回归效果的相关指数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$，$\sqrt{17}\approx 4.1$））

18.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\perp AB$，$AB/\!/DC$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$，点 E 为棱 PC 的中点.

（Ⅰ）证明：平面 $PBC\perp$ 平面 PCD；

（Ⅱ）求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积；



19.(12 分)

在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c 且 $b+c=a\cos B+\sqrt{3}a\sin B$.

(Ⅰ)求角 A 的大小;

(Ⅱ)若 D 是 BC 边上一点,且 $CD=2DB$,若 $AD=2$,求△ABC 面积的最大值.

20.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+1$.

(Ⅰ)若 $f(x)\leqslant x+c$,求 c 的取值范围;

(Ⅱ)设 $a>0$ 时,讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$的单调性.

21.(12 分)

已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,直线 l_1 过椭圆 C 的两个顶点,且原点 O 到直线 l_1 的距离为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的标准方程;

(Ⅱ)当过点 $P(0,2)$的动直线 l 与椭圆 C 相交于两个不同点 A,B 时,求$\dfrac{|PA|}{|PB|}$的取值范围.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所写的第一题计分.

22.(10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\cos\alpha},\\ y=\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha},\end{cases}$($\alpha$ 为参数,$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$),以坐标原点 O 为极点,x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

(Ⅰ)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(Ⅱ)已知点 $P(2,0)$,若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,求$\left|\dfrac{1}{|PA|}-\dfrac{1}{|PB|}\right|$的值.

23.(10 分)

已知 $f(x)=|2x+2|+|x-3|$.

(Ⅰ)求不等式 $f(x)\leqslant 5$ 的解集;

(Ⅱ)若 $f(x)$的最小值为 m,正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$,求证$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}\geqslant\dfrac{9}{2m}$.