此卷不装订

郑州市2023年高中毕业年级第一次质量预测

理科数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|y=\sqrt{-x^2+4x-3}\}$，$B=\{x|\log_3(x-1)<1\}$. 则 $A\cap B=$

A. $\{x|1\leqslant x<3\}$　　B. $\{x|3<x\leqslant 4\}$

C. $\{x|1<x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$

2. 已知 i 是虚数单位，若复数 z 的实部为 1，$z\cdot\bar{z}=4$，则复数 z 的虚部为

A. $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{15}$ 或 $\sqrt{15}$

C. -1 或 1　　D. $-\sqrt{15}i$ 或 $\sqrt{15}i$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，则其渐近线方程为

A. $x\pm y=0$　　B. $x\pm\sqrt{3}y=0$

C. $\sqrt{3}x\pm y=0$　　D. $2x\pm y=0$

4. 欧拉函数 $\varphi(n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 的函数值等于所有不超过正整数 n，且与 n 互素（也称互质）的正整数的个数，例如 $\varphi(1)=1$. $\varphi(4)=2$，$\varphi(9)=6$. 则

A. 数列 $\{\varphi(n)\}$ 单调　　B. $\varphi(5)<\varphi(6)$

C. 数列 $\{\varphi(2^n)\}$ 是等比数列　　D. $\varphi(6)=\varphi(2)+\varphi(3)$

5. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y+1\leqslant 0,\\x+y-5\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的

A. 最大值为 4　　B. 最小值为 4

C. 最大值为 5　　D. 最小值为 5

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$S_8\geqslant S_7\geqslant S_9$，则公差 d 的取值范围是

A. $[-\frac{2}{7},-\frac{4}{15}]$　　B. $[-\frac{2}{7},-\frac{1}{4}]$

C. $[-\frac{4}{15},-\frac{1}{4}]$　　D. $[-\frac{2}{7},0]$

7. 记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\pi<T<2\pi$，且 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}$，关于该函数有下列四个说法：

①$2<\omega<3$；

②$f(\frac{\pi}{2})=0$；

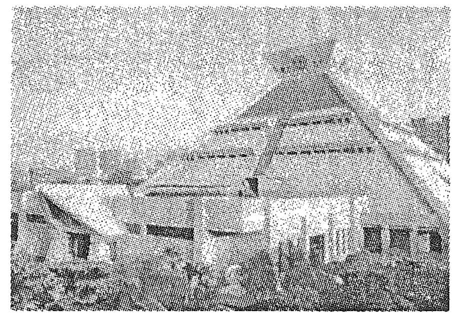
③$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增；

④为了得到 $g(x)=\sin\omega x$ 的图象，只需将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.

以上四个说法中，正确的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 河南博物院主展馆的主体建筑以元代登封古观星台为原型，经艺术夸张演绎成“戴冠的金字塔”造型，冠部为“方斗”形，上扬下覆，取上承“甘露”、下纳“地气”之意. 冠部以及冠部下方均可视为正四棱台. 已知一个“方斗”的上底面与下底面的面积之比为 1∶4，高为 2，体积为 $\frac{56}{3}$，则该“方斗”的侧面积为



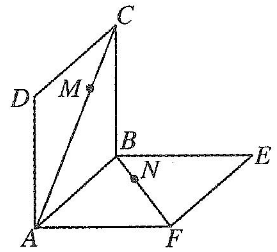
A. 24　　B. 12

C. $24\sqrt{5}$　　D. $12\sqrt{5}$

9. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知角 $C=\frac{\pi}{4}$，$b\sin(\frac{\pi}{4}+A)-a\sin(\frac{\pi}{4}+B)=c$，则角 $B=$

A. $\frac{\pi}{8}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{5\pi}{8}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

10. 在如图所示的实验装置中，两个正方形框架 $ABCD$，$ABEF$ 的边长都为1，且它们所在的平面互相垂直. 活动弹子 M，N 分别在正方形对角线 AC 和 BF 上移动，且 CM 和 BN 的长度保持相等，记 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$. 则下列结论错误的是



A. 该模型外接球的半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 当 $a=\frac{1}{2}$时，MN 的长度最小

C. 异面直线 AC 与 BF 所成的角为 $60°$

D. MN∥平面 BCE

11. 已知直线 l 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$交于 A，B 两点，O 为坐标原点，$OA\perp OB$，$OH\perp AB$ 交 AB 于点 H，点 H 的坐标为$(2,2)$，则 p 的值为

A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

12. 已知函数 $f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$为偶函数，$f(x+2)$为奇函数，且满足 $f(1)+f(2)=2$，则$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=$

A. -2023　　B. 0　　C. 2　　D. 2023

二、填空题(每题 5 分，满分 20 分.)

13. $(x^2-\frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是________.

14. 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，若$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{DE}$，且 F 为 BC 的中点，则$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=$________.

15. 经过点 $P(1,1)$以及圆 $x^2+y^2-4=0$ 与 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 交点的圆的方程为________.

16. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}-ax$，若 $f(x)$有两个不同的极值点 x_1，x_2，且 $0<x_2-x_1<\ln 2$，则 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：每题 12 分，共 60 分.

17.（12 分）

已知数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$满足$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=n-2+\frac{1}{2^{n-1}}$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

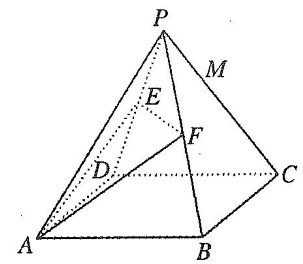
（Ⅱ）若 $b_n=a_n\cdot\cos n\pi$，求数列$\{b_n\}$前 $2n$ 项和 T_{2n}.

18.（12 分）

如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长和高均为 2，E，F 分别为 PD，PB 的中点.

（Ⅰ）若点 M 是线段 PC 上的点，且 $PM=\frac{1}{3}PC$，判断点 M 是否在平面 AEF 内，并证明你的结论；

（Ⅱ）求直线 PB 与平面 AEF 所成角的正弦值.



19.（12 分）

世界杯足球赛淘汰赛阶段的比赛规则为：90 分钟内进球多的球队取胜，如果参赛双方在 90 分钟内无法决出胜负（踢成平局），将进行 30 分钟的加时赛，若加时赛阶段两队仍未分出胜负，则进入“点球大战”. 点球大战的规则如下：①两队各派 5 名队员，双方轮流踢点球，累计进球个数多者胜；②如果在踢满 5 球前，一队进球数已多于另一队踢 5 球可能踢中的球数，则该队胜出，譬如：第 4 轮结束时，双方进球数比 2:0，则不需踢第 5 轮了；③若前 5 轮点球大战中双方进球数持平，则采用“突然死亡法”决出胜负，即从第 6 轮起，双方每轮各派 1 人踢点球，若均进球或均不进球，则继续下一轮. 直到出现一方进球另一方不进球的情况，进球方胜.

现有甲乙两队在淘汰赛中相遇，双方势均力敌，120 分钟（含加时赛）仍未分出胜负，须采用“点球大战”决定胜负. 设甲队每名球员射进的概率为$\frac{1}{2}$，乙队每名球员射进的概率为$\frac{2}{3}$. 每轮点球结果互不影响.

（Ⅰ）设甲队踢了 5 球，X 为射进点球的个数，求 X 的分布列与期望；

（Ⅱ）若每轮点球都由甲队先踢，求在第四轮点球结束时，乙队进了 4 个球并刚好胜出的概率.

20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $P(2,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设不过点 P 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，A 关于原点的对称点为 D，记直线 l,PB,PD 的斜率分别为 k,k_1,k_2，若 $k_1\cdot k_2=\frac{1}{2}$，证明直线 l 的斜率 k 为定值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x,x\in[-\pi,\pi]$.

（Ⅰ）求 $f(x)$的单调区间与最值；

（Ⅱ）若存在 $x_0\in[0,\pi]$，使得不等式 $f(x_0)\geqslant a(x_0^2+1)$成立，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答. 在答题卷上将所选题号涂黑，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{\cos\alpha},\\ y=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha},\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

（Ⅰ）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（Ⅱ）已知点 $P(2,0)$，若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，求$\left|\frac{1}{|PA|}-\frac{1}{|PB|}\right|$的值.

23.（10 分）

已知 $f(x)=|2x+2|+|x-3|$.

（Ⅰ）求不等式 $f(x)\leqslant 5$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)$的最小值为 m，正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$，求证$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{9}{2m}$.