2020-2021 郑州市第二次质量预测理科数学评分参考

一、选择题

BCDAA　　BDCAD　　BB

二、填空题

13. $y=x$;　14.-3;　15. $\sqrt{2}$;　16. $(0,e]$.

三、解答题

17. 解：（1）由题意 $S_n=\dfrac{(n+1)a_n}{2}$，$S_{n-1}=\dfrac{na_{n-1}}{2}(n\geq 2)$，两式相减得，　………………2 分

$a_n=\dfrac{(n+1)a_n}{2}-\dfrac{na_{n-1}}{2}(n\geq 2)$，………………4 分

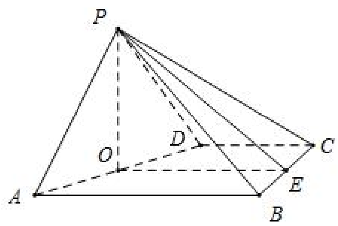
即 $(n-1)a_n=na_{n-1}$，$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\dfrac{a_1}{1}=1$，所以 $a_n=n$.　………………6 分

（2）$b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1})$，………………8 分

$T_{2021}=(1+\dfrac{1}{2})-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4})+\cdots-(\dfrac{1}{2020}+\dfrac{1}{2021})+(\dfrac{1}{2021}+\dfrac{1}{2022})$

$=1+\dfrac{1}{2022}=\dfrac{2023}{2022}$.　………………12 分

18. 解：（1）设 AD、BC 的中点分别为 O、E，连接 PO、OE、EP，



则 OE 为直角梯形 $ABCD$ 的中位线，故 $BC\perp OE$．……………2 分

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

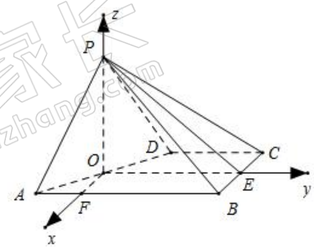
$PO\perp AD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\perp BC$，又 $PO\cap OE=O$，

所以 $BC\perp$ 平面 PEO，　………………4 分

又 $PE\subset$ 平面 PEO，故 $BC\perp PE$，又 E 为 BC 中点，所以 $PB=PC$ ……………5 分

（2）在 AB 上取一点 F，使得 $AB=4AF$，则 OF，OE，OP 两两垂直，以 O 为原点，

射线 OF，OE，OP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，$P(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$



$A(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)$，$C(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},0)$，$D(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$，…6 分

从而：$\overrightarrow{PA}=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PC}=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，　8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0,\\ y=0\end{cases}$ ………………10 分

可取$\vec{n}=(\sqrt{2},0,-1)$， $\cos<\overrightarrow{PA},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故直线PB与平面PCD夹角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………12 分

19.解：（1）由题意知，$\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ 解得$a^2=4$，$b^2=3$， ………………4 分

椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.………………5 分

（2）显然直线l斜率不为 0，设直线l方程为$x=my+1$，与$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$联立得：

$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$， ………………7 分

设P、Q点坐标为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 则$y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

直线 AP 的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令$x=4$，得$y_M=\dfrac{6y_1}{x_1+2}$，同理$y_N=\dfrac{6y_2}{x_2+2}$，

$$y_My_N=\frac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{36y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}=\frac{36y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}$$

$$=\frac{36\dfrac{-9}{3m^2+4}}{m^2\dfrac{-9}{3m^2+4}+3m\dfrac{-6m}{3m^2+4}+9}=-9.$$ ………………9 分

（3）$S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot|y_M-y_N|=3|y_M+\dfrac{9}{y_M}|\ge 3\cdot 2\sqrt{y_M\cdot\dfrac{9}{y_M}}=18.$

当且仅当$y_M=3, y_N=-3$或$y_M=-3, y_N=3$时等号成立. ………………12 分

20. （1）X服从正态分布$N(280,25)$，所以$P\left(X<265\right)=\dfrac{1-0.9974}{2}=0.0013$，…2 分

$P\left(X \geq 265\right)=1-0.0013=0.9987$. ………………4 分

至少一个零件尺寸小于 265 的概率为$1-(0.9987)^{10}=1-0.9871=0.0129$. ……5 分

（2）四年内正常维护费为$5000\times 4=20000$元， ………………6 分

故障维修费第一次 2000 元，第二次 4000 元，第三次 6000 元，第四次 8000 元，

所以四年内生产维护费用总和Y的可能取值为 20000、22000、26000、32000、40000，

则$P\left(Y=20000\right)=C_4^0\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{81}{256}$，$P\left(Y=22000\right)=C_4^1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$，

$P\left(Y=26000\right)=C_4^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{27}{128}$，$P\left(Y=32000\right)=C_4^3\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{64}$，

$P\left(Y=40000\right)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^4=\dfrac{1}{256}$， ………………9 分

则Y的分布列为：

Y	20000	22000	26000	32000	40000
P	$\dfrac{81}{256}$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{27}{128}$	$\dfrac{3}{64}$	$\dfrac{1}{256}$

故$E\left(Y\right)=2000\times\dfrac{81}{256}+22000\times\dfrac{27}{64}+26000\times\dfrac{27}{128}+32000\times\dfrac{3}{64}+40000\times\dfrac{1}{256}$

$=22750$. ………………12 分

21.（1）当$a=2e$，不等式$f(x)\geq mx-m$即为$xe^x-2e\ln x-e\geq mx-m$， …………2 分

令$F(x)=xe^x-2e\ln x-e-m(x-1),x\in[1,+\infty)$

$F'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{2e}{x}-m$, $F'(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$F'(1)=-m$， ………………4 分

当$m\leq 0$时，$F'(1)\geq 0$，$F'(x)\geq F'(1)\geq 0$，$F(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$F(x)\geq F(1)\geq 0$.

当$m>0$时，$F'(1)<0$,当$x\to+\infty, F'(x)\to+\infty$，所以存在$x^*\in(1,+\infty)$，$F'(x^*)=0$，

当$x\in(1,x^*)$，$F'(x)<0$, $F(x)$单调递减，$F(x)<F(1)=0$. 不符合题意.

综上，$m\leq 0$. ………………6 分

（2）$f(x)=xe^x-a\ln x-e$，$f'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{a}{x}$，$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当 $x\to 0, f'(x)\to -\infty$， $x\to +\infty, f'(x)\to +\infty$，所以存在唯一的正数 $x_0\in(0,+\infty)$，

$f'(x_0)=0$， ………………7 分

当 $x\in(0,x_0)$， $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$， $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

$f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0}-a\ln x_0-e=x_0e^{x_0}-x_0(x_0+1)e^{x_0}\ln x_0-e$， ………………8 分

令 $h(x)=xe^x-x(x+1)e^x\ln x-e, x\in(0,+\infty)$

$h'(x)=(x+1)e^x-e^x[(x^2+3x+1)\ln x+x+1]=-e^x(x^2+3x+1)\ln x$， ……………10 分

所以 $h(1)=0$，且当 $x\in(0,1)$， $h'(x)>0, h(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$， $h'(x)<0, h(x)$ 单调递减， $h(x)_{\max}=h(1)=0$，此时 $x_0=1, a=2e.$ ………………12 分

22. （Ⅰ） $\rho=4\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\cos\theta=4\sin\theta+2\cos\theta$， …………2 分

$\rho^2=4\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$， $\therefore x^2+y^2=4y+2x$， ………………4 分

$\therefore$ 圆 C_2 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-2x-4y=0$ ………………5 分

（Ⅱ）因为曲线 C_1 与 C_2 有且仅有一个公共点，说明直线 $y=\tan\alpha\cdot x+5$ 与圆 C_2 相切，C_2 圆心为（1，2），半径为 $\sqrt{5}$，则 $\frac{|\tan\alpha+3|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\sqrt{5}$，解得 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$（舍去）， ………………8 分

所以 $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2}{5}.$ ……10 分

23.（Ⅰ）由题意得： $f(x)=|2x-4|+|x+1|=\begin{cases}3x-3, x\ge 2\\ -x+5, -1\le x<2\\ -3x+3, x<-1\end{cases}$， ………………2 分

①当 $x\ge 2$ 时，由 $3x-3\ge 5$ 得： $x\ge\frac{8}{3}$， $\therefore x\ge\frac{8}{3}$；

②当 $-1\le x<2$ 时，由 $-x+5\ge 5$ 得： $x\le 0$， $\therefore -1\le x\le 0$；

③当 $x<-1$ 时，由 $-3x+2\ge 5$ 得： $x\le -1$， $\therefore x\le -1$； ………………4 分

综上所述：不等式 $f(x)\ge 5$ 的解集为 $(-\infty,0]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$. ………………5 分

（Ⅱ）$f(x)\ge a^2-2a+4$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min}\ge a^2-2a+4$，　………………6 分

$\because f(x)=|2x-4|+|x+a|=|x-2|+|x-2|+|x+a|$

$\ge|x-2|+|x+a|\ge|(x+a)-(x-2)|=a+2$，等号成立条件是 $x=2$，　………………8 分

$\therefore f(x)_{\min}=a+2$，$\therefore a+2\ge a^2-2a+4$，解得：$1\le a\le 2$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[1,2]$．　………………10 分