

2020 年高中毕业年级第二次质量预测 理科数学试题卷

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | a+1 \leq x \leq 3a-5\}$, $B = \{x | 3 < x < 22\}$, 且 $A \cap B = A$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 9]$ B. $(-\infty, 9)$ C. $[2, 9]$ D. $(2, 9)$

2. 已知复数 $z = \frac{2+i}{i^3}$ (其中 i 是虚数单位, 满足 $i^2 = -1$), 则 z 的共轭复数是

- A. $1-2i$ B. $1+2i$ C. $-1-2i$ D. $-1+2i$

3. 郑州市 2019 年各月的平均气温($^{\circ}\text{C}$)数据的茎叶图如下:

则这组数据的中位数是

- A. 20
B. 21
C. 20.5
D. 23

0	1	2
1	5	6 8
2	0	1 3 3 8
3	2	4

4. 圆 $(x+2)^2 + (y-12)^2 = 4$ 关于直线 $x-y+8=0$ 对称的圆的方程为

- A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$ B. $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 4$
C. $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 4$ D. $(x+6)^2 + (y+4)^2 = 4$

5. 在边长为 30 米的正六边形广场正上空悬挂一个照明光源, 已知这个光源发出的光线过旋转轴的截面是一个等腰直角三角形, 要使整个广场都照明, 光源悬挂的高度至少为

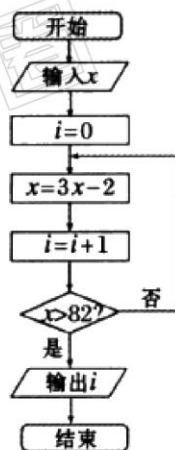
- A. 30 米 B. 20 米 C. $15\sqrt{2}$ 米 D. 15 米

6. 若 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $2\cos 2\alpha = \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值为

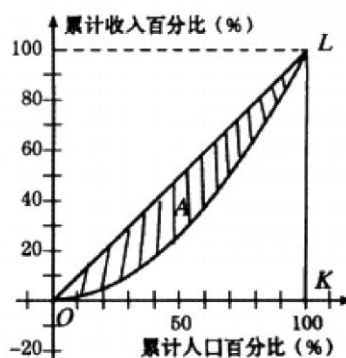
- A. $-\frac{7}{8}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$

7. 在如图所示的程序框图中, 若输出的值是 4, 则输入的 x 的取值范围是

- A. $(2, +\infty)$ B. $(2, 4]$ C. $(4, 10]$ D. $(4, +\infty)$



8. 为了研究国民收入在国民之间的分配, 避免贫富过分悬殊, 美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线, 如图所示. 劳伦茨曲线为直线 OL 时, 表示收入完全平等. 劳伦茨曲线为折线 OKL 时, 表示收入完全不平等. 记区域 A 为不平等区域, a 表示其面积; S 为 $\triangle OKL$ 的面积. 将 $Gini = \frac{a}{S}$, 称为基尼系数. 对于下列说法:



- ① $Gini$ 越小, 则国民分配越公平;
② 设劳伦茨曲线对应的函数为 $y = f(x)$, 则对 $\forall x \in (0, 1)$, 均有 $\frac{f(x)}{x} > 1$;

③ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^2 (x \in [0, 1])$, 则 $Gini = \frac{1}{4}$;

④ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^3 (x \in [0, 1])$, 则 $Gini = \frac{1}{2}$.

其中不正确的是:

- A. ①④ B. ②③ C. ①③④ D. ①②④

9. 2019 年 10 月 1 日是中华人民共和国成立 70 周年国庆日, 将 2, 0, 1, 9, 10 按照任意次序排成一行, 拼成一个 6 位数, 则产生的不同的 6 位数的个数为

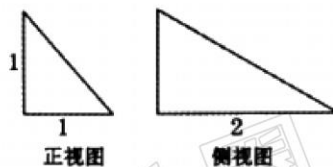
- A. 96 B. 84 C. 120 D. 360

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_3, a_{13} 成等比数列, 若 $a_1 = 1, S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $\frac{2S_n + 6}{a_n + 3}$ 的最小值为

- A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{3} - 2$ D. 2

11. 《九章算术》中将底面为长方形, 且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为“阳马”. 现有一阳马, 其正视图和侧视图是如图所示的直角三角形. 若该阳马的顶点都在同一个球面上, 则该球的表面积为

- A. $\sqrt{6}\pi$ B. 2π
C. 6π D. 24π



12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过 F 作直线 $y = -\frac{b}{a}x$ 的垂线, 垂足为 M , 且交双曲线的左支于 N 点, 若 $\overrightarrow{FN} = 2\overrightarrow{FM}$, 则该双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 二项式 $(x + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中的常数项为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = -\frac{\pi}{2x}$, $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$, 当 $x \in [-4\pi, 4\pi]$ 且 $x \neq 0$ 时, 方程 $f(x) = g(x)$ 根的个数是 _____.

15. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 90^\circ$, $AD = 1, BC = 2$, M 是 AB 边上的动点, 则 $|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ 的最小值为 _____.

16. 设函数 $y = \begin{cases} -x^3 + x^2, & x < e, \\ \frac{\ln x}{m}, & x \geq e \end{cases}$ 的图象上存在两点 P, Q , 使得 $\triangle POQ$ 是以 O 为直角顶

点的直角三角形(其中 O 为坐标原点), 且斜边的中点恰好在 y 轴上, 则实数 m 的取值范围是 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为公差为零的等差数列, $S_7 = 77$, 且满足 $a_{11}^2 = a_1 \cdot a_{61}$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $b_1 = \frac{1}{3}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

由团中央学校部、全国学联秘书处、中国青年报社共同举办的 2018 年度全国“最美中学生”寻访活动结果出炉啦, 此项活动于 2018 年 6 月启动, 面向全国中学在校学生, 通过投票方式寻访一批在热爱祖国、勤奋学习、热心助人、见义勇为等方面表现突出、自觉树立和践行社会主义核心价值观的“最美中学生”。现随机抽取了 30 名学生的票数, 绘成如图所示的茎叶图, 若规定票数在 65 票以上(包括 65 票)定义为风华组, 票数在 65 票以下(不包括 65 票)的学生定义为青春组。

9	3
8	7 7 8 9 9
7	1 2 4 5 8 8 9 9
6	0 2 3 4 4 5 6 7 8
5	0 1 1 2 4 7
4	1

(I) 在这 30 名学生中, 青春组学生中有男生 7 人, 风华组学生中有女生 12 人, 试问有没有 90% 的把握认为票数分在青春组或风华组与性别有关;

(II) 如果用分层抽样的方法从青春组 and 风华组中抽取 5 人, 再从这 5 人中随机抽取 2 人, 那么至少有 1 人在青春组的概率是多少?

(III) 用样本估计总体, 把频率作为概率, 若从该地区所有的中学(人数很多)中随机选取 4 人, 用 ξ 表示所选 4 人中青春组的人数, 试写出 ξ 的分布列, 并求出 ξ 的数学期望。

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$; 其中 $n = a+b+c+d$

独立性检验临界表:

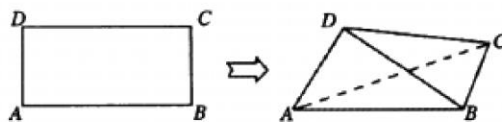
$P(K^2 > k_0)$	0.100	0.050	0.010
K	2.706	3.841	6.635

19. (12 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 沿对角线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起, 使得点 D 在平面 ABC 内的射影恰好落在边 AB 上。

(I) 求证: 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ;

(II) 当 $\frac{AB}{AD} = 2$ 时, 求二面角 $D-AC-B$ 的余弦值.



20. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 内, 动点 A 到定点 $F(3, 0)$ 的距离与 A 到定直线 $x=4$ 距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求动点 A 的轨迹 C 的方程;

(II) 设点 M, N 是轨迹 C 上两个动点, 直线 OM, ON 与轨迹 C 的另一交点分别为 P, Q , 且直线 OM, ON 的斜率之积等于 $-\frac{1}{4}$, 问四边形 $MNPQ$ 的面积 S 是否为定值? 请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{a}$, $g(x) = \frac{x+1}{x} (x > 0)$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(II) 讨论函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{g(x)}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在极坐标系中, 圆 C 的方程为 $\rho = 2a \sin \theta (a > 0)$. 以极点为坐标原点, 极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系, 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 4t + 3 \end{cases} (t \text{ 为参数})$.

(I) 求圆 C 的标准方程和直线 l 的普通方程;

(II) 若直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| \geq \sqrt{3}a$. 求实数 a 的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x+1| - a|x-1|$.

(I) 当 $a=-2$ 时, 解不等式 $f(x) > 5$;

(II) 若 $f(x) \leq a|x+3|$, 求 a 的最小值.

加群步骤

2020高考家长群

- ① 长按右侧二维码+群主好友
- ② 备注“高三”
加入【2020高考微信群】
- ③ 第一时间了解全面升学动态



每个牛娃身后都有一个牛家长