2020 年高中毕业年级第二次质量预测

理科数学　评分参考

一、选择题

BCCCA　　ABBBD　　CC

二、填空题

13. 160；　　14. 8；　　15. 3；　　16. $[e+1,+\infty)$.

三、解答题

17. (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}7a_1+21d=77,\\ a_1(a_1+60d)=(a_1+10d)^2,\end{cases}$ ……………………3 分

解得 $\begin{cases}a_1=5,\\ d=2,\end{cases}$ $\therefore a_n=2n+3$. ………………5 分

(2) 由 $\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}=a_n$，$\therefore \frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n-1}}=a_{n-1}(n\ge 2,n\in \mathbf{N}*)$.

当 $n\ge 2$ 时，$\frac{1}{b_n}=(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n-1}})+(\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_{n-2}})+\cdots+(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_1})+\frac{1}{b_1}=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+\frac{1}{b_1}$

$=(n-1)(n-2+5)+3=n(n+2)$. ……………………………8 分

对 $b_1=\frac{1}{3}$ 也适合，……………………………9 分

$\therefore \frac{1}{b_n}=n(n+2)(n\in N)\therefore b_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$. ……………………10 分

$\therefore T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$. 12 分

18. (I) 作出 2×2 列联表：

	青春组	风华组	合计
男生	7	6	13
女生	5	12	17
合计	12	18	30

……………………………3 分

由列联表数据代入公式得 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\approx 1.83$， ……………………5

分

因为 1.83<2.706，

故没有 90%的把握认为成绩分在青春组或风华组与性别有

关. ……………………………… 6 分

(Ⅱ) 用 A 表示“至少有 1 人在青春组”，则 $p(A)=1-\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{7}{10}$. ……………

8 分

(III)由题知，抽取的 30 名学生中有 12 名学生是青春组学生，抽取 1 名学生是青春组学生的概率为 $\dfrac{12}{30}=\dfrac{2}{5}$，那么从所有的中学生中抽取 1 名学生是甲组学生的概率是 $\dfrac{2}{5}$，又因为所取总体数量较多，抽取 4 名学生可以看出 4 次独立重复实验，于是 ξ 服从二项分布 $B(4,\dfrac{2}{5})$.

……………………………10 分

显然 ξ 的取值为 0，1，2，3， 4． 且 $P(\xi=k)=C_4^k(\dfrac{2}{5})^k(1-\dfrac{2}{5})^{4-k},k=0,1,2,3,4$.

所以得分布列为：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{81}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{96}{625}$	$\dfrac{16}{625}$

数学期望 $E\xi=4\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$ ………………………………12 分

19. (Ⅰ) 设点 D 在平面 ABC 上的射影为点 E，连接 DE，则 $DE\perp$ 平面 ABC，

$\therefore DE\perp BC$. ……………………………………………………………………………2 分

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB\perp BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 ABD，$\therefore BC\perp AD$.

……………………………………………………………………………………………4

分

又 $AD\perp CD$，所以 $AD\perp$ 平面 BCD，而 $AD\subset$ 平面 ABD，$\therefore$ 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.

……………………………………………………………………………………………6

分

（Ⅱ）以点 B 为原点，线段 BC 所在的直线为 x 轴，线段 AB 所在的直线为 y 轴，建立空间直角坐标系，如图所示. 设 $AD=a$，则 $AB=2a$，$\therefore A(0,2a,0)$，$C(a,0,0)$.

由（Ⅰ）知 $AD\perp BD$，又 $\dfrac{AB}{AD}=2$，$\therefore \angle DBA=30^\circ$，$\angle DAB=60^\circ$，

$\therefore AE=AD\cdot\cos\angle DAB=\dfrac{1}{2}a$，$BE=AB-AE=\dfrac{3}{2}a$，$DE=AD\cdot\sin\angle DAB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

$\therefore D(0,\dfrac{3}{2}a,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$，$\therefore \overrightarrow{AD}=(0,-\dfrac{1}{2}a,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$，$\overrightarrow{AC}=(a,-2a,0)$. ………………8 分

设平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

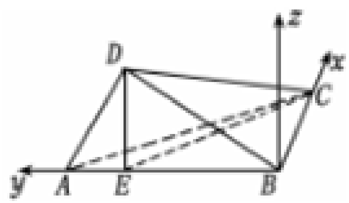
则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}ay+\dfrac{\sqrt{3}}{2}az=0,\\ ax-2ay=0.\end{cases}$

不妨取 $z=1$，则 $y=\sqrt{3}$，$x=2\sqrt{3}$，$\therefore \vec{m}=(2\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.

而平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，………………………………………10 分

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1^2}}=\dfrac{1}{4}$.

故二面角 $D-AC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………12 分



20. **解**（Ⅰ）设 $A(x,y)$，由题意，$\dfrac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{|x-4|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，………………………2 分

化简得 $x^2+4y^2=12$，…（3 分）所以，动点 A 的轨迹 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$.…4 分

（Ⅱ）**解**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由斜率之积，得 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{4}$，………6 分

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，因为点 M,N 在椭圆 C 上，

所以 $y_1^2=3-\dfrac{x_1^2}{4},y_2^2=3-\dfrac{x_2^2}{4}$.化简得 $x_1^2+x_2^2=12$． ……………………………8 分

直线 AB 的方程为 $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2=0$，原点 O 到直线 MN 的距离为 $d=\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$.

所以，ΔMON 的面积 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$，

根据椭圆的对称性，四边形 $MNPQ$ 的面积 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|$，……10 分

所以，$S^2=4(x_1y_2-x_2y_1)^2=4(x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2)$

$12(x_1^2+x_2^2)=144$，所以 $S=12.$

所以，四边形 $MNPQ$ 的面积为定值 12. ……………………………………12 分

21. 解析：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，曲线 $y=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$.

$y'=\dfrac{(1+\ln x)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{\ln x+x+1}{(x+1)^2}$. ……………………………2 分

$x=1$ 时，切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，又切线过点 $(1,0)$

所以切线方程为 $x-2y-1=0$ ……………………………4 分

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{1}{ax},(\dfrac{1}{g(x)})'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$，

$F'(x)=f'(x)-(\dfrac{1}{g(x)})'=\dfrac{1}{ax}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-ax}{ax(x+1)^2}$，………5 分

当 $a<0$ 时，$F'(x)<0$，函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；……………………………7 分

当 $a>0$ 时，令 $k(x)=\dfrac{1}{a}x^2+\left(\dfrac{2}{a}-1\right)x+\dfrac{1}{a}$，$\Delta=1-\dfrac{4}{a}$,

当$\Delta \le 0$时，即$0 < a \le 4$，$k(x) \ge 0$，此时$F'(x) \ge 0$，函数$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当$\Delta > 0$时，即$a > 4$，方程$\frac{1}{a}x^2+\left(\frac{2}{a}-1\right)x+\frac{1}{a}=0$有两个不等实根$x_1 < x_2$，

所以$0 < x_1 < 1 < x_2$，$\left(x_1=\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}, x_2=\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)$

此时，函数$F(x)$在$(0,x_1),(x_2,+\infty)$上单调递增；在(x_1,x_2)上单调递减. ……………11 分

综上所述，当$a < 0$时，$F(x)$的单减区间是$(0,+\infty)$；

当$a > 4$时，$F(x)$的单减区间是$\left(\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2},\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)$，

单增区间是$\left(0,\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)$，$\left(\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty\right)$

当$0 < a \le 4$时，$F(x)$单增区间是$(0,+\infty)$. ……………………………12 分

22.（Ⅰ）C的直角坐标方程为$x^2+(y-a)^2=a^2$，　……………………………2 分

消 t 得到$4x-3y+5=0$………………………………………………4 分

（Ⅱ）要满足弦$|AB| \ge \sqrt{3}a$及圆的半径为 a 可知只需圆心（0，a）到直线 l 的距离$d \le \frac{1}{2}a$即可。由点到直线的距离公式有：$\frac{|-3a+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \le \frac{1}{2}a$…………7 分

整理得：$11a^2-120a+100 \le 0$, 即$(11a-10)(a-10) \le 0$解得：$\frac{10}{11} \le a \le 10$，

故实数 a 的取值范围为$\frac{10}{11} \le a \le 10$……………………………………………10 分

23. 解：（Ⅰ）当 $a=-2$时，$f(x)=\begin{cases}1-3x, x<-1,\\ 3-x, -1 \le x \le 1,\\ 3x-1, x>1.\end{cases}$……………………………3 分

由 $f(x)$ 的单调性及 $f(-\frac{4}{3})=f(2)=5$，

得 $f(x)>5$ 的解集为$\{x|x<-\frac{4}{3}$，或 $x>2\}$. …………………………………………5 分

（Ⅱ）由 $f(x)\leqslant a|x+3|$得 $a\geq\frac{|x+1|}{|x-1|+|x+3|}$，　　　　……………………7 分

由$|x-1|+|x+3|\geq 2|x+1|$

得 $\frac{|x+1|}{|x-1|+|x+3|}\leq\frac{1}{2}$，得 $a\geq\frac{1}{2}$.

故 a 的最小值为$\frac{1}{2}$.　　　　……………………………10 分