2020届高三年级3月联合检测

数　学(理科)

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $z=(3-i)(a+2i)(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数,则 $z=$

A. $\frac{16}{3}i$　　B. $6i$　　C. $\frac{20}{3}i$　　D. 20

2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x^2<8x\}$, $B=\{2,3,6\}$, $C=\{2,3,7\}$,则 $B\cup(\complement_A C)=$

A. $\{2,3,4,5\}$　　B. $\{2,3,4,5,6\}$

C. $\{1,2,3,4,5,6\}$　　D. $\{1,3,4,5,6,7\}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,则 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{11}$　　B. $\sqrt{37}$　　C. $2\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{43}$

4. 若双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 的一条渐近线方程为 $3x+2y=0$,则 $m=$

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

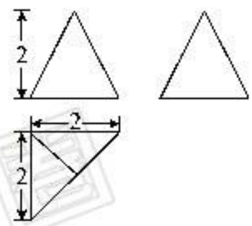
5. 已知底面是等腰直角三角形的三棱锥 $P-ABC$ 的三视图如图所示,俯视图中的两个小三角形全等,则

A. PA,PB,PC 两两垂直

B. 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{8}{3}$

C. $|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{6}$

D. 三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $3\sqrt{5}$



6. 山东烟台苹果因“果形端正、色泽艳丽、果肉甜脆、香气浓郁”享誉国内外.据统计,烟台苹果(把苹果近似看成球体)的直径(单位:mm)服从正态分布 $N(80,5^2)$,则直径在 $(75,90]$ 内的概率为

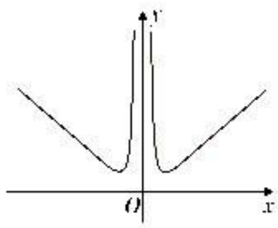
附:若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$, $P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$.

A. 0.6826　　B. 0.8413　　C. 0.8185　　D. 0.9544

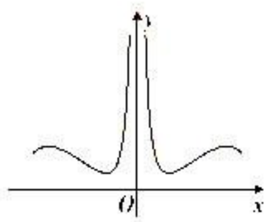
7. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+b(\omega>0)$, $f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8}-x)$,且 $f(\frac{\pi}{8})=5$,则 $b=$

A. 3　　B. 3或7　　C. 5　　D. 5或8

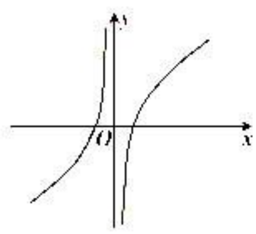
8. 函数 $f(x)=|x|-\frac{\ln|x|}{x^2}$ 的图象大致为



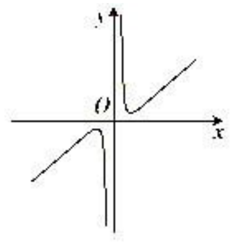
A



B



C



D

9. 设不等式组$\begin{cases} x+y\geqslant 0, \\ x-\sqrt{3}y\leqslant 0 \end{cases}$表示的平面区域为$\Omega$,若从圆$C:x^2+y^2=4$的内部随机选取一点$P$,则$P$取自$\Omega$的概率为

A. $\frac{5}{24}$　　B. $\frac{7}{24}$　　C. $\frac{11}{24}$　　D. $\frac{17}{24}$

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases} 4^x+3, x\leqslant 0, \\ 2^x+\log_3 x^2-9, x>0, \end{cases}$则函数$y=f(f(x))$的零点所在区间为

A. $(3,\frac{7}{2})$　　B. $(-1,0)$　　C. $(\frac{7}{2},4)$　　D. $(4,5)$

11. 已知直线$y=k(x-1)$与抛物线$C:y^2=4x$交于A,B两点,直线$y=2k(x-2)$与抛物线$D:y^2=8x$交于M,N两点,设$\lambda=|AB|-2|MN|$,则

A. $\lambda<-16$　　B. $\lambda=-16$　　C. $-12<\lambda<0$　　D. $\lambda=-12$

12. "中国剩余定理"又称"孙子定理",最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题,叫做"物不知数",原文如下:今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二.问物几何?现有这样一个相关的问题:将1到2020这2020个自然数中被5除余3且被7除余2的数按照从小到大的顺序排成一列,构成一个数列,则该数列各项之和为

A. 56383　　B. 57171　　C. 59189　　D. 61242

第Ⅱ卷

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. $(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^6$展开式的第5项的系数为____▲____.

14. 函数$f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)+x-1$的值域为____▲____.

15. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_n\neq 0$,曲线$y=x^3$在点(a_n,a_n^3)处的切线经过点$(a_{n+1},0)$,下列四个结论:

①$a_2=\frac{2}{3}$;②$a_3=\frac{1}{3}$;③$\sum_{i=1}^{4}a_i=\frac{65}{27}$;④数列$\{a_n\}$是等比数列.

其中所有正确结论的编号是____▲____.

16. 在矩形$ABCD$中,$BC=4$,M为BC的中点,将$\triangle ABM$和$\triangle DCM$分别沿AM,DM翻折,使点B与C重合于点P.若$\angle APD=150°$,则三棱锥$M-PAD$的外接球的表面积为____▲____.

三、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (12分)

a,b,c分别为$\triangle ABC$内角A,B,C的对边.已知$a=3$,$c\sin C=\sin A+b\sin B$,且$B=60°$.

(1)求$\triangle ABC$的面积;

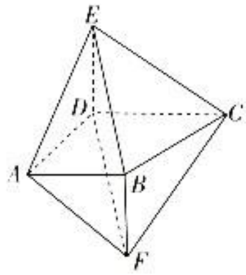
(2)若 D,E 是 BC 边上的三等分点,求 $\sin\angle DAE$.

18.(12 分)

如图,四棱锥 $E-ABCD$ 的侧棱 DE 与四棱锥 $F-ABCD$ 的侧棱 BF 都与底面 $ABCD$ 垂直,$AD\perp CD$,$AB/\!/CD$,$AB=3$,$AD=CD=4$,$AE=5$,$AF=3\sqrt{2}$.

(1)证明:$DF/\!/$平面 BCE.

(2)设平面 ABF 与平面 CDF 所成二面角为 θ,求 $\cos 2\theta$.



19.(12 分)

追求人类与生存环境的和谐发展是中国特色社会主义生态文明的价值取向. 为了改善空气质量,某城市环保局随机抽取了一年内 100 天的空气质量指数(AQI)的检测数据,结果统计如下:

AQI	[0,50]	(50,100]	(100,150]	(150,200]	(200,250]	(250,300]
空气质量	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	严重污染
天数	6	14	18	27	25	10

(1)从空气质量指数属于[0,50],(50,100]的天数中任取 3 天,求这 3 天中空气质量至少有 2 天为优的概率;

(2)已知某企业每天因空气质量造成的经济损失 y(单位:元)与空气质量指数 x 的关系式为 $y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 220, & 100<x\leqslant 250,\\ 1480, & 250<x\leqslant 300.\end{cases}$ 假设该企业所在地 7 月与 8 月每天空气质量为优、良、轻度污染、中度污染、重度污染、严重污染的概率分别为 $\frac{1}{6}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{12}$,$\frac{1}{12}$,$\frac{1}{6}$. 9 月每天的空气质量对应的概率以表中 100 天的空气质量的频率代替.

(ⅰ)记该企业 9 月每天因空气质量造成的经济损失为 X 元,求 X 的分布列;

(ⅱ)试问该企业 7 月、8 月、9 月这三个月因空气质量造成的经济损失总额的数学期望是否会超过 2.88 万元? 说明你的理由.

20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(1,\frac{3}{2})$，过坐标原点 O 作两条互相垂直的射线与椭圆 C 分别交于 M、N 两点.

(1)证明：当 a^2+9b^2 取得最小值时，椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)若椭圆 C 的焦距为 2，是否存在定圆与直线 MN 总相切？若存在，求定圆的方程；若不存在，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=2\ln(x+1)+\sin x+1$，函数 $g(x)=ax-1-b\ln x(a,b\in\mathbf{R},ab\neq0)$.

(1)讨论 $g(x)$ 的单调性；

(2)证明：当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant3x+1$.

(3)证明：当 $x>-1$ 时，$f(x)<(x^2-2x+2)e^{\sin x}$.

(二)选考题：共 10 分. 请考生从第 22,23 两题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一个题目计分.

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系. 已知点 P 的直角坐标为 $(-2,0)$，过 P 的直线 l 与曲线 C 相交于 M、N 两点.

(1)若 l 的斜率为 2，求 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程；

(2)求 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的值.

23.[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+1|$，记不等式 $f(x)<4$ 的解集为 M.

(1)求 M；

(2)设 $a,b\in M$，证明：$|ab|-|a|-|b|-1>0$.

数学(理科)参考答案

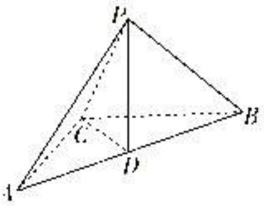
1.C　因为$z=3a+2+(6-a)i$为纯虚数，所以$3a+2=0$，$a=-\frac{2}{3}$，则$z=\frac{20}{3}i$.

2.C　因为$A=\{x\in N|0<x<8\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，所以$\complement_A C=\{1,4,5,6\}$，所以$B\cup(\complement_A C)=\{1,2,3,4,5,6\}$.

3.D　因为$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2=1^2-6\times1\times2\times\cos120°+9\times2^2=43$，所以$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{43}$.

4.A　由题意知，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}x(m>0)$，$3x+2y=0$可化为$y=-\frac{3}{2}x$，所以$\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{3}{2}$，解得$m=\frac{4}{9}$.

5.C　根据三视图，可得三棱锥$P-ABC$的直观图如图所示，其中D为AB的中点，$PD\perp$底面ABC.所以三棱锥$P-ABC$的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，$|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{6}$，$PA,PB,PC$不可能两两垂直，三棱锥$P-ABC$的侧面积为$2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

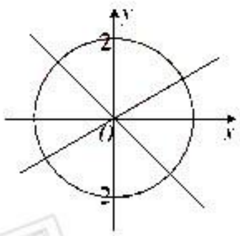


6.C　由题意，$\mu=80$，$\sigma=5$，则$P(75<X\leqslant85)=0.6826$，$P(70<X\leqslant90)=0.9544$.
所以$P(85<X\leqslant90)=\frac{1}{2}\times(0.9544-0.6826)=0.1359$，$P(75<X\leqslant90)=0.6826+0.1359=0.8185$.
故果实直径在$(75,90]$内的概率为0.8185.

7.B　$\because f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8}-x)$，$\therefore f(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{8}$对称，$\therefore f(\frac{\pi}{8})=b\pm2=5$，即$b=3$或7.

8.A　因为$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数，排除C和D.当$x>0$时，$f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$，$f'(x)=\frac{x^3+2\ln x-1}{x^3}$，令$f'(x)<0$，得$0<x<1$；令$f'(x)>0$，得$x>1$.所以$f(x)$在$x=1$处取得极小值，排除B，故选A.

9.B　作出Ω中在圆C内部的区域，如图所示，因为直线$x+y=0$，$x-\sqrt{3}y=0$的倾斜角分别为$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{6}$，所以由图可得P取自Ω的概率为$\frac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}}{2\pi}=\frac{7}{24}$.



10.A　当$x\leqslant0$时，$f(x)\in(3,4]$，此时，$f(x)$无零点；
当$x>0$时，$f(x)=2^x+\log_9x^2-9=2^x+\log_3x-9$为增函数，且$f(3)=0$.
令$f(f(x))=0$，得$f(x)=2^x+\log_3x-9=3$，因为$f(3)=0<3$，$f(\frac{7}{2})=8\sqrt{2}+\log_3\frac{7}{2}-9>3$，
所以函数$y=f(f(x))$的零点所在区间为$(3,\frac{7}{2})$.

11.D　设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，则$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=2+\frac{4}{k^2}$，
因为直线$y=k(x-1)$经过C的焦点，所以$|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}$.同理可得$|MN|=8+\frac{2}{k^2}$，所以$\lambda=4-16=-12$.

12.C　被5除余3且被7除余2的正整数构成首项为23，公差为$5\times7=35$的等差数列.记该数列为$\{a_n\}$，则$a_n=23+35(n-1)=35n-12$，令$a_n=35n-12\leqslant2020$，解得$n\leqslant58\frac{2}{35}$，故该数列各项之和为$58\times23+\frac{58\times57}{2}\times35=59189$.

13.70　$(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^8$的展开式的通项$T_{r+1}=C_8^r(2x)^{8-r}(-\frac{1}{2\sqrt{x}})^r=(-1)^rC_8^r2^{8-2r}x^{8-\frac{3}{2}r}$，当$r=4$时，$C_8^42^{8-2r}=C_8^4=70$.

14. $[-3,+\infty)$ ∵ $f(x)=2x-4\sqrt{x}-1=2(\sqrt{x}-1)^2-3(x\geqslant 0)$，∴ $f(x)$的值域为$[-3,+\infty)$.

15. ①③④ ∵ $y'=3x^2$，∴曲线 $y=x^3$ 在点(a_n,a_n^3)处的切线方程为 $y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n)$，

则$-a_n^3=3a_n^2(a_{n+1}-a_n)$. ∵$a_n\neq 0$，∴$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$，则$\{a_n\}$是首项为1，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列.

从而 $a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{4}{9}$，$\sum_{i=1}^{4}a_i=\frac{1-(\frac{2}{3})^4}{1-\frac{2}{3}}=\frac{65}{27}$，故所有正确结论的编号是①③④.

16. 68π 由题意可知，$MP\perp PA$，$MP\perp PD$，所以 $MP\perp$平面 PAD. 设$\triangle ADP$外接圆的半径为r，则由正弦定理可得$\frac{AD}{\sin\angle APD}=2r$，即$\frac{4}{\sin 150^\circ}=2r$，所以$r=4$. 设三棱锥 $M-PAD$ 外接球的半径为R，则 $R^2=(\frac{AM}{2})^2+r^2=1+16=17$，所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=68\pi$.

17. 解：(1)∵$c\sin C=\sin A+b\sin B$，∴由正弦定理得 $c^2=a+b^2$. …………………… 1分

∵$a=3$，∴$b^2=c^2-3$. …………………… 2分

又 $B=60^\circ$，∴$b^2=c^2+9-2\times 3\times c\times\frac{1}{2}=c^2-3$，…………………… 4分

∴$c=4$，…………………… 5分

∴$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=3\sqrt{3}$. …………………… 6分

(2)设 D 靠近点 B，则 $BD=DE=EC=1$. …………………… 7分

在$\triangle ABD$中，由余弦定理，得 $AD=\sqrt{1^2+4^2-2\times 1\times 4\times\cos 60^\circ}=\sqrt{13}$. …………………… 9分

又 $b=\sqrt{c^2-3}=\sqrt{13}$，∴$AC=AD$. …………………… 10分

∵$DE=EC$，∴$AE\perp CD$. …………………… 11分

故 $\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{13}}{13}$. …………………… 12分

18. (1)证明：∵$DE\perp$平面 $ABCD$，∴$DE\perp AD$.

∵$AD=4$，$AE=5$，∴$DE=3$. …………………… 1分

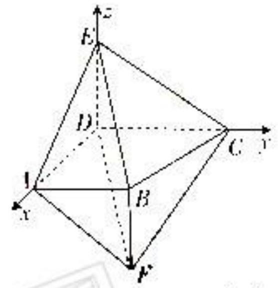
同理可得 $BF=3$. …………………… 2分

又 $DE\perp$平面 $ABCD$，$BF\perp$平面 $ABCD$，

∴$BF/\!/DE$. …………………… 3分

∵$BF=DE$，∴四边形 $BEDF$ 为平行四边形，∴$DF/\!/BE$. …………………… 4分

∵$BE\subset$平面 BCE，$DF\not\subset$平面 BCE，∴$DF/\!/$平面 BCE. …………………… 5分



(2)解：以 D 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

则 $D(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$C(0,4,0)$，$F(4,3,-3)$. …………………… 6分

则$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{DF}=(4,3,-3)$. …………………… 7分

设平面 CDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0$，即$\begin{cases}4y=0,\\4x+3y-3z=0.\end{cases}$ …………………… 8分

令 $x=3$，则 $z=4$，得 $\boldsymbol{n}=(3,0,4)$. …………………… 9分

易知平面 ABF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，…………………… 10分

∴$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{5}$，…………………… 11分

故 $\cos 2\theta=2\times(\frac{3}{5})^2-1=-\frac{7}{25}$. …………………… 12分

19. 解：(1)设ξ为选取的3天中空气质量为优的天数，则

$P(\xi\geqslant 2)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{C_6^2C_{14}^1}{C_{20}^3}+\frac{C_6^3C_{14}^0}{C_{20}^3}=\frac{23}{114}$. …………………… 4分

(2)(ⅰ)X 的可能取值为 0，220，1480.

$P(X=0)=P(0\leqslant x\leqslant 100)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，…………………… 5分

$P(X=220)=P(100<x\leqslant 250)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$, …………………………………………………… 6 分

$P(X=1480)=P(250<x\leqslant 300)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$, …………………………………………………… 7 分

则 X 的分布列为

X	0	220	1480
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$

(ⅱ)由(ⅰ)知 $EX=0\times\frac{1}{5}+220\times\frac{7}{10}+1480\times\frac{1}{10}=302$(元),

故该企业 9 月的经济损失的数学期望为 $30EX=9060$(元). …………………………………………………… 8 分

设该企业 7 月与 8 月每天因空气质量造成的经济损失为 Y 元,

则 $P(Y=0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, $P(Y=220)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$,

$P(Y=1480)=\frac{1}{6}$, …………………………………………………… 9 分

所以 $EY=0\times\frac{1}{2}+220\times\frac{1}{3}+1480\times\frac{1}{6}=320$(元). …………………………………………………… 10 分

所以 7 月与 8 月因空气质量造成经济损失的总额为 $320\times(31+31)=19840$(元). …………………………………………………… 11 分

因为 $19840+9060=28900>2.88$ 万,

所以这 3 个月经济损失总额的数学期望会超过 2.88 万元. …………………………………………………… 12 分

20. (1)证明:∵椭圆 C 经过点 $(1,\frac{3}{2})$,∴$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$, …………………………………………………… 1 分

∴$a^2+9b^2=(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2})(a^2+9b^2)=\frac{85}{4}+\frac{9b^2}{a^2}+\frac{9a^2}{4b^2}\geqslant\frac{85}{4}+2\sqrt{\frac{9b^2}{a^2}\cdot\frac{9a^2}{4b^2}}=\frac{121}{4}$. …………………………………………………… 2 分

当且仅当 $\frac{9b^2}{a^2}=\frac{9a^2}{4b^2}$,即 $a^2=2b^2$ 时,等号成立. …………………………………………………… 3 分

此时椭圆 C 的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………………………… 4 分

(2)解:∵椭圆 C 的焦距为 2,∴$a^2-b^2=1$,又 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$,∴$a^2=4,b^2=3$. …………………………………………………… 5 分

当直线 MN 的斜率不存在时,由对称性,设 $M(x_0,x_0)$,$N(x_0,-x_0)$.

∵M,N 在椭圆 C 上,∴$\frac{x_0^2}{4}+\frac{x_0^2}{3}=1$,∴$x_0^2=\frac{12}{7}$,∴$O$ 到直线 MN 的距离 $d=|x_0|=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. …… 6 分

当直线 MN 的斜率存在时,设 MN 的方程为 $y=kx+m$,

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$, …………………………………………………… 7 分

$\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$, …………………………………………………… 8 分

∵$OM\perp ON$,∴$x_1x_2+y_1y_2=0$,

∴$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$, …………………………………………………… 9 分

∴$(k^2+1)\cdot\frac{4m^2-12}{3+4k^2}-\frac{8k^2m^2}{3+4k^2}+m^2=0$,即 $7m^2=12(k^2+1)$, …………………………………………………… 10 分

∴O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. …………………………………………………… 11 分

综上,O 到直线 MN 的距离为定值,且定值为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$,故存在定圆 $O:x^2+y^2=\frac{12}{7}$,使得圆 O 与直线 MN 总

相切. …………………………………………………………………………………… 12分

21. (1)解：$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$g'(x)=\frac{ax-b}{x}$. …………………………………………………… 1分

当$a>0,b<0$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；…………………………………… 2分

当$a>0,b>0$时，令$g'(x)>0$，得$x>\frac{b}{a}$，令$g'(x)<0$，得$0<x<\frac{b}{a}$，则$g(x)$在$(0,\frac{b}{a})$上单调递减，在$(\frac{b}{a},+\infty)$上单调递增；…………………………………………………………………………………… 3分

当$a<0,b>0$时，$g'(x)<0$，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；…………………………………… 4分

当$a<0,b<0$时，令$g'(x)>0$，得$0<x<\frac{b}{a}$，令$g'(x)<0$，得$x>\frac{b}{a}$，则$g(x)$在$(0,\frac{b}{a})$上单调递增，在$(\frac{b}{a},+\infty)$上单调递减. …………………………………………………………………………………… 5分

(2)证明：设函数$h(x)=f(x)-(3x+1)$，则$h'(x)=\frac{2}{x+1}+\cos x-3$.

因为$x\geqslant 0$，所以$\frac{2}{x+1}\in(0,2]$，$\cos x\in[-1,1]$，…………………………………………… 6分

则$h'(x)\leqslant 0$，从而$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减. …………………………………………… 7分

所以$h(x)=f(x)-(3x+1)\leqslant h(0)=0$，即$f(x)\leqslant 3x+1$. …………………………………… 8分

(3)证明：当$a=b=1$时，$g(x)=x-1-\ln x$.

由(1)知，$g(x)_{min}=g(1)=0$，所以$g(x)=x-(1+\ln x)\geqslant 0$，

即$x\geqslant 1+\ln x$. …………………………………………………………………………………… 9分

当$x>-1$时，$(x+1)^2>0$，$(x+1)^2e^{\sin x}>0$，

则$(x+1)^2e^{\sin x}\geqslant 1+\ln[(x+1)^2e^{\sin x}]$，

即$(x+1)^2e^{\sin x}\geqslant 2\ln(x+1)+\sin x+1$. …………………………………………………… 10分

又$(x^2+2x+2)e^{\sin x}>(x+1)^2e^{\sin x}$，…………………………………………………………… 11分

所以$(x^2+2x+2)e^{\sin x}>2\ln(x+1)+\sin x+1$，

即$f(x)<(x^2+2x+2)e^{\sin x}$. …………………………………………………………………… 12分

22. 解：(1) l的直角坐标方程为$y=2(x+2)$，即$2x-y+4=0$. …………………………………… 1分

则l的极坐标方程为$2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+4=0$. …………………………………………… 3分

曲线C的普通方程为$(x+1)^2+y^2=4$. …………………………………………………………… 5分

(2)直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数，$\alpha$为$l$的倾斜角），…………………… 7分

代入曲线C的普通方程，得$t^2-2t\cos\alpha-3=0$. ………………………………………………… 8分

设M,N对应的参数分别为t_1,t_2，则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=t_1t_2=-3$. …………………………… 10分

23. (1)解：$f(x)=\begin{cases}-4x, x\leqslant-\frac{1}{2},\\ 2, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ 4x, x\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$ …………………………………………………… 3分

由$f(x)<4$，解得$-1<x<1$. ………………………………………………………………………… 4分

故$M=\{x|-1<x<1\}$. …………………………………………………………………………… 5分

(2)证明：因为$a,b\in M$，所以$|a|<1,|b|<1$，……………………………………………………… 7分

所以$|ab|-(|a|+|b|)+1=(|a|-1)(|b|-1)>0$，…………………………………………………… 9分

所以$|ab|-|a|-|b|+1>0$. …………………………………………………………………………… 10分