2020届高三年级3月联合检测

数　学(文科)

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{x\mid 2^x>4\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{6\}$　　B. $\{3,6\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{2,3,6\}$

2. 若等差数列的前两项分别为1,3,则该数列的前10项和为

A. 81　　B. 90　　C. 100　　D. 121

3. 设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,定义 $\boxed{z}=b+ai$. 若 $\frac{\boxed{z}}{1+i}=\frac{i}{2-i}$,则 $z=$

A. $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$　　B. $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

C. $-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$　　D. $-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$

4. 书架上有两套我国四大名著,现从中取出两本. 设事件 M 表示"两本都是《红楼梦》";事件 N 表示"一本是《西游记》,一本是《水浒传》";事件 P 表示"取出的两本中至少有一本《红楼梦》". 下列结论正确的是

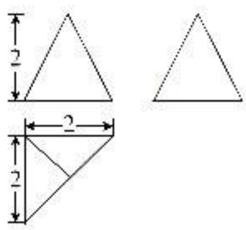
A. M 与 P 是互斥事件　　B. M 与 N 是互斥事件

C. N 与 P 是对立事件　　D. M,N,P 两两互斥

5. 若双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 的一条渐近线方程为 $3x+2y=0$,则 $m=$

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

6. 已知底面是等腰直角三角形的三棱锥 $P-ABC$ 的三视图如图所示,俯视图中的两个小三角形全等,则



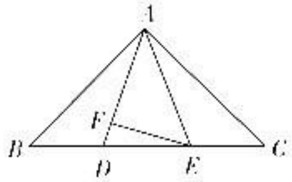
A. PA,PB,PC 两两垂直

B. 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{8}{3}$

C. $|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{6}$

D. 三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $3\sqrt{5}$

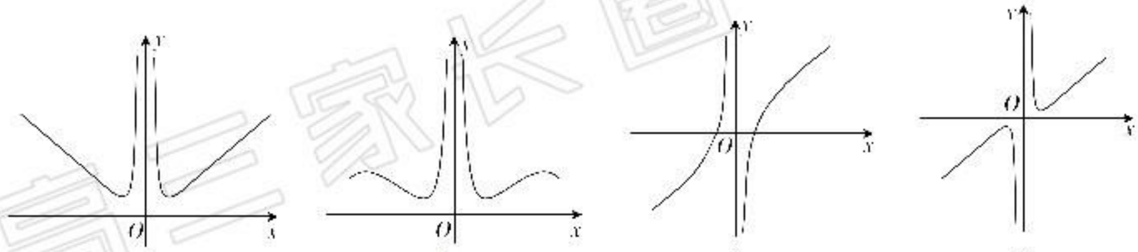
7. 如图，在等腰直角$\triangle ABC$中，D、E分别为斜边BC的三等分点(D靠近点B)，过E作AD的垂线，垂足为F，则$\overrightarrow{AF}=$



A. $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{4}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{15}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{8}{15}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$

8. 函数$f(x)=|x|-\frac{\ln|x|}{x^2}$的图象大致为



A　　B　　C　　D

9. 设不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-\sqrt{3}y\leqslant 0\end{cases}$表示的平面区域为$\Omega$，若从圆$C$：$x^2+y^2=4$的内部随机选取一点$P$，则$P$取自$\Omega$的概率为

A. $\frac{5}{24}$　　B. $\frac{7}{24}$　　C. $\frac{11}{24}$　　D. $\frac{17}{24}$

10. 张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家，他曾经得出圆周率的平方除以十六等于八分之五. 已知三棱锥$A-BCD$的每个顶点都在球O的球面上，$AB\perp$底面BCD，$BC\perp CD$，且$AB=CD=\sqrt{3}$，$BC=2$，利用张衡的结论可得球O的表面积为

A. 30　　B. $10\sqrt{10}$　　C. 33　　D. $12\sqrt{10}$

11. 已知函数$f(x)=\begin{cases}4^x+3,x\leqslant 0,\\ 2^x+\log_3 x^2-9,x>0,\end{cases}$则函数$y=f(f(x))$的零点所在区间为

A. $(3,\frac{7}{2})$　　B. $(-1,0)$　　C. $(\frac{7}{2},4)$　　D. $(4,5)$

12. 已知直线$y=k(x-1)$与抛物线C：$y^2=4x$交于A，B两点，直线$y=2k(x-2)$与抛物线D：$y^2=8x$交于M，N两点，设$\lambda=|AB|-2|MN|$，则

A. $\lambda<-16$　　B. $\lambda=-16$　　C. $-12<\lambda<0$　　D. $\lambda=-12$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 函数$f(x)=9x^2+\sqrt{x-1}$的最小值为＿▲＿.

14. 函数$f(x)=|\sin 4x|$的图象的对称轴方程为＿▲＿.

15. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，设BC_1，BD_1与底面$ABCD$所成角分别为α，β，则$\tan(\alpha+\beta)=$＿▲＿.

16. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，曲线$y=x^3$在点(a_n,a_n^3)处的切线经过点$(a_{n+1},0)$，下列四个结论：

①$a_2=\frac{2}{3}$；②$a_3=\frac{1}{3}$；③$\sum_{i=1}^{4}a_i=\frac{65}{27}$；④数列$\{a_n\}$是等比数列.

其中所有正确结论的编号是＿▲＿.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

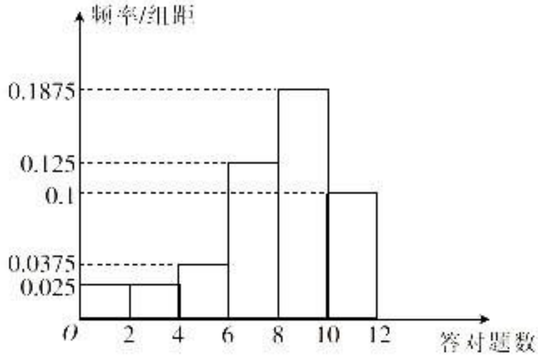
(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

为了解某中学学生对《中华人民共和国交通安全法》的了解情况,调查部门在该校进行了一次问卷调查(共 12 道题),从该校学生中随机抽取 40 人,统计了每人答对的题数,将统计结果分成$[0,2)$,$[2,4)$,$[4,6)$,$[6,8)$,$[8,10)$,$[10,12]$六组,得到如下频率分布直方图.

(1)若答对一题得 10 分,未答对不得分,估计这 40 人的成绩的平均分(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2)若从答对题数在$[2,6)$内的学生中随机抽取 2 人,求恰有 1 人答对题数在$[2,4)$内的概率.



18.(12 分)

a,b,c 分别为$\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边. 已知 $a=3$,$c\sin C=\sin A+b\sin B$,且 $B=60°$.

(1)求$\triangle ABC$ 的面积;

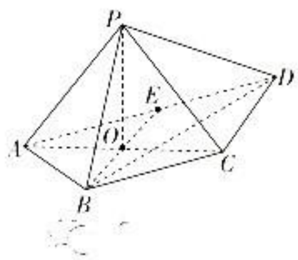
(2)若 D,E 是 BC 边上的三等分点,求 $\sin\angle DAE$.

19.(12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$AP\perp$平面 PCD,$AD\parallel BC$,$AB\perp BC$,$AP=AB=BC=\frac{1}{2}AD$,E 为 AD 的中点,AC 与 BE 相交于点 O.

(1)证明:$PO\perp$平面 $ABCD$.

(2)若 $OB=1$,求点 C 到平面 PAB 的距离.



20.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+\frac{4}{27}$.

（1）若 $f(x)$ 在 $(a-1,a+3)$ 上存在极大值，求 a 的取值范围；

（2）若 x 轴是曲线 $y=f(x)$ 的一条切线，证明：当 $x\geqslant-1$ 时，$f(x)\geqslant x-\frac{23}{27}$.

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(1,\frac{3}{2})$，过坐标原点 O 作两条互相垂直的射线与椭圆 C 分别交于 M,N 两点.

（1）证明：当 a^2+9b^2 取得最小值时，椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）若椭圆 C 的焦距为 2，是否存在定圆与直线 MN 总相切？若存在，求定圆的方程；若不存在，请说明理由.

（二）选考题：共 10 分. 请考生从第 22,23 两题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一个题目计分.

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系. 已知点 P 的直角坐标为 $(-2,0)$，过 P 的直线 l 与曲线 C 相交于 M,N 两点.

（1）若 l 的斜率为 2，求 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程；

（2）求 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的值.

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+1|$，记不等式 $f(x)<4$ 的解集为 M.

（1）求 M；

（2）设 $a,b\in M$，证明：$|ab|-|a|-|b|-1>0$.

数学(文科)参考答案

1.B　因为 $B=\{x|x>2\}$，所以 $A\cap B=\{3,6\}$.

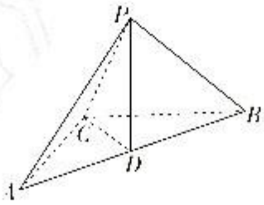
2.C　因为公差 $d=3-1=2$，所以该数列的前10项和为 $10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$.

3.B　因为 $\frac{\bar{z}}{1+i}=\frac{i}{2-i}$，所以 $\bar{z}=\frac{i(1+i)}{2-i}=\frac{(-1+i)(2-i)}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$，则 $z=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$.

4.B　M 与 P 是既不是对立也不是互斥事件，M 与 N 是互斥事件，N 与 P 是互斥事件.

5.A　由题意知，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}x(m>0)$，$3x+2y=0$ 可化为 $y=-\frac{3}{2}x$，所以 $\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{3}{2}$，解得 $m=\frac{4}{9}$.

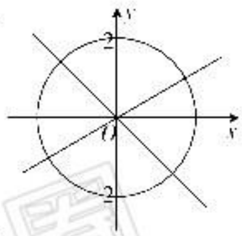
6.C　根据三视图，可得三棱锥 $P-ABC$ 的直观图如图所示，其中 D 为 AB 的中点，$PD\perp$ 底面 ABC，所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，$|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{6}$，$PA$，$PB$，$PC$ 不可能两两垂直，三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.



7.D　设 $BC=6$，则 $DE=2$，$AD=AE=\sqrt{10}$，$\cos\angle DAE=\frac{10+10-4}{2\cdot10}=\frac{4}{5}$，所以 $\frac{AF}{AD}=\frac{AF}{AE}=\frac{4}{5}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$. 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\times(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})=\frac{8}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$.

8.A　因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，排除 C 和 D. 当 $x>0$ 时，$f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$，$f'(x)=\frac{x^3+2\ln x-1}{x^3}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$；令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，排除 B，故选 A.

9.B　作出 Ω 中在圆 C 内部的区域，如图所示，因为直线 $x+y=0$，$x-\sqrt{3}y=0$ 的倾斜角分别为 $\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{6}$，所以由图可得 P 取自 Ω 的概率为 $\frac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}}{2\pi}=\frac{7}{24}$.



10.B　因为 $BC\perp CD$，所以 $BD=\sqrt{7}$，又 $AB\perp$ 底面 BCD，所以球 O 的球心为侧棱 AD 的中点，从而球 O 的直径为 $\sqrt{10}$. 利用张衡的结论可得 $\frac{\pi^2}{16}=\frac{5}{8}$，则 $\pi=\sqrt{10}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi(\frac{\sqrt{10}}{2})^2=10\pi=10\sqrt{10}$.

11.A　当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)\in(3,4]$，此时，$f(x)$ 无零点；
当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x+\log_4 x^2-9=2^x+\log_2 x-9$ 为增函数，且 $f(3)=0$.
令 $f(f(x))=0$，得 $f(x)=2^x+\log_2 x-9=3$，因为 $f(3)=0<3$，$f(\frac{7}{2})=8\sqrt{2}+\log_2\frac{7}{2}-9>3$，
所以函数 $y=f(f(x))$ 的零点所在区间为 $(3,\frac{7}{2})$.

12.D　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=2+\frac{4}{k^2}$，因为直线 $y=k(x-1)$ 经过 C 的焦点，所以 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}$. 同理可得 $|MN|=8-\frac{2}{k}$，所以 $\lambda=4-16=-12$.

13.9　$\because f(x)$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，且 $f(x)$ 在定义域上单调递增，$\therefore f(x)_{min}=f(1)=9$.

14. $x=\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$　令 $4x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

15. $3+2\sqrt{2}$　因为 CC_1，DD_1 都与底面 $ABCD$ 垂直，所以 $\alpha=\angle C_1BC$，$\beta=\angle D_1BD$，$\tan\alpha=1$，$\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=3+2\sqrt{2}.$$

16. ①③④　∵ $y'=3x^2$，∴曲线 $y=x^3$ 在点 (a_n,a_n^3) 处的切线方程为 $y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n)$，

则 $-a_n^3=3a_n^2(a_{n+1}-a_n)$. ∵ $a_n\neq0$，∴ $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$，则 $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列.

从而 $a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{4}{9}$，$\sum_{i=1}^{4}a_i=\frac{1-(\frac{2}{3})^4}{1-\frac{2}{3}}=\frac{65}{27}$，故所有正确结论的编号是①③④.

17. 解：(1)因为答对题数的平均数约为 $(1\times0.025+3\times0.025+5\times0.0375+7\times0.125+9\times0.1875+11\times0.1)\times2=7.9$. ……………… 4分

所以这40人的成绩的平均分约为 $7.9\times10=79$. ……………… 6分

(2)答对题数在 $[2,4)$ 内的学生有 $0.025\times2\times40=2$ 人，记为 A，B；……………… 7分

答对题数在 $[4,6)$ 内的学生有 $0.0375\times2\times40=3$ 人，记为 c，d，e. ……………… 8分

从答对题数在 $[2,6)$ 内的学生中随机抽取2人的情况有 (A,B)，(A,c)，(A,d)，(A,e)，(B,c)，(B,d)，(B,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共10种. ……………… 10分

恰有1人答对题数在 $[2,4)$ 内的情况有 (A,c)，(A,d)，(A,e)，(B,c)，(B,d)，(B,e)，共6种. ……………… 11分

故所求概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ……………… 12分

18. 解：(1)∵ $c\sin C=\sin A+b\sin B$，∴由正弦定理得 $c^2=a+b^2$. ……………… 1分

∵ $a=3$，∴ $b^2=c^2-3$. ……………… 2分

又 $B=60°$，∴ $b^2=c^2+9-2\times3\times c\times\frac{1}{2}=c^2-3$. ……………… 4分

∴ $c=4$. ……………… 5分

∴△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=3\sqrt{3}$. ……………… 6分

(2)设 D 靠近点 B，则 $BD=DE=EC=1$. ……………… 7分

在△ABD 中，由余弦定理，得 $AD=\sqrt{1^2+4^2-2\times1\times4\times\cos60°}=\sqrt{13}$. ……………… 9分

又 $b=\sqrt{c^2-3}=\sqrt{13}$，∴ $AC=AD$. ……………… 10分

∵ $DE=EC$，∴ $AE\perp CD$. ……………… 11分

故 $\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………… 12分

19. (1)证明：∵ $AP\perp$ 平面 PCD，∴ $AP\perp CD$. ……………… 1分

∵ $AD/\!/BC$，$BC=\frac{1}{2}AD$，∴四边形 $BCDE$ 为平行四边形. ……………… 2分

∴ $BE/\!/CD$，

∴ $AP\perp BE$. ……………… 3分

又∵ $AB\perp BC$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，且 E 为 AD 的中点，

∴四边形 $ABCE$ 为正方形，∴ $BE\perp AC$. ……………… 4分

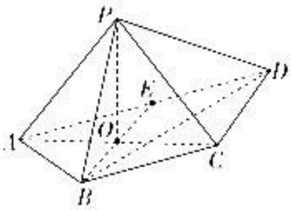
又 $AP\cap AC=A$，∴ $BE\perp$ 平面 APC，则 $BE\perp PO$. ……………… 5分

∵ $AP\perp$ 平面 PCD，∴ $AP\perp PC$，又 $AC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}AP$，

∴△PAC 为等腰直角三角形，O 为斜边 AC 上的中点，……………… 6分

∴ $PO\perp AC$ 且 $AC\cap BE=O$，∴ $PO\perp$ 平面 $ABCD$. ……………… 7分

(2)解：∵$OB=1$，∴$PA=PB=AB=\sqrt{2}$. ………………………………………… 8分



设C到平面PAB的距离为d，

由$V_{C-PAB}=V_{P-ABC}$，………………………………………………………… 9分

得$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times1$，……………………………… 10分

解得$d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………… 12分

20.(1)解：$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$，令$f'(x)=0$，得$x_1=0$，$x_2=\frac{2a}{3}$.

当$a=0$时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$单调递增，$f(x)$无极值，不合题意；……………………………… 1分

当$a>0$时，$f(x)$在$x=\frac{2a}{3}$处取得极小值，在$x=0$处取得极大值，……………………………… 2分

则$a-1<0<a+3$，又$a>0$，所以$0<a<1$；……………………………………………………… 3分

当$a<0$时，$f(x)$在$x=\frac{2a}{3}$处取得极大值，在$x=0$处取得极小值，……………………………… 4分

则$a-1<\frac{2a}{3}<a+3$，又$a<0$，所以$-9<a<0$. ………………………………………………… 5分

综上，a的取值范围为$(-9,0)\cup(0,1)$. …………………………………………………………… 6分

(2)证明：由题意得$f(0)=0$，或$f(\frac{2a}{3})=0$，即$\frac{4}{27}=0$(不成立)，或$-\frac{4}{27}a^3+\frac{4}{27}=0$. ………… 7分

解得$a=1$. ……………………………………………………………………………………… 8分

设函数$g(x)=f(x)-(x-\frac{23}{27})=x^3-x^2-x+1$，$g'(x)=(3x+1)(x-1)$.

当$-1\leqslant x<-\frac{1}{3}$或$x>1$时，$g'(x)>0$；当$-\frac{1}{3}<x<1$时，$g'(x)<0$. ……………………… 9分

所以$g(x)$在$x=1$处取得极小值，且极小值为$g(1)=0$. ……………………………………………… 10分

又$g(-1)=0$，所以当$x\geqslant-1$时，$g(x)\geqslant0$. ……………………………………………………… 11分

故当$x\geqslant-1$时，$f(x)\geqslant x-\frac{23}{27}$. ………………………………………………………… 12分

21.(1)证明：∵椭圆C经过点$(1,\frac{3}{2})$，∴$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，……………………………………… 1分

∴$a^2+9b^2=(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2})(a^2+9b^2)=\frac{85}{4}+\frac{9b^2}{a^2}+\frac{9a^2}{4b^2}\geqslant\frac{85}{4}+2\sqrt{\frac{9b^2}{a^2}\cdot\frac{9a^2}{4b^2}}=\frac{121}{4}$，……… 2分

当且仅当$\frac{9b^2}{a^2}=\frac{9a^2}{4b^2}$，即$a^2=2b^2$时，等号成立，…………………………………………… 3分

此时椭圆C的离心率$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………… 4分

(2)解：∵椭圆C的焦距为2，∴$a^2-b^2=1$，又$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，∴$a^2=4$，$b^2=3$. ……………… 5分

当直线MN的斜率不存在时，由对称性，设$M(x_0,x_0)$，$N(x_0,-x_0)$.

∵M，N在椭圆C上，∴$\frac{x_0^2}{4}+\frac{x_0^2}{3}=1$，∴$x_0^2=\frac{12}{7}$，∴$O$到直线$MN$的距离$d=|x_0|=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. … 6分

当直线MN的斜率存在时，设MN的方程为$y=kx+m$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，……………………………… 7分

$\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，……………………… 8分

∵$OM\perp ON$，∴$x_1x_2+y_1y_2=0$.

∴$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，……………………………… 9分

$\therefore (k^2+1)\cdot\frac{4m^2-12}{3+4k^2}-\frac{8k^2m^2}{3+4k^2}+m^2=0$，即 $7m^2=12(k^2+1)$. ………………………………………… 10分

$\therefore O$ 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………… 11分

综上，O 到直线 MN 的距离为定值，且定值为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$，故存在定圆 $O:x^2+y^2=\frac{12}{7}$，使得圆 O 与直线 MN 总相切. ………………………………………… 12分

22. 解：(1) l 的直角坐标方程为 $y=2(x+2)$，即 $2x-y+4=0$，………………………………………… 1分

则 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+4=0$. ………………………………………… 3分

曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2+y^2=4$. ………………………………………… 5分

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，α 为 l 的倾斜角). ………………………………………… 7分

代入曲线 C 的普通方程，得 $t^2-2t\cos\alpha-3=0$. ………………………………………… 8分

设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=t_1t_2=-3$. ………………………………………… 10分

23. (1) 解：$f(x)=\begin{cases}-4x, & x\leqslant-\frac{1}{2},\\ 2, & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ 4x, & x\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$ ………………………………………… 3分

由 $f(x)<4$，解得 $-1<x<1$. ………………………………………… 4分

故 $M=\{x|-1<x<1\}$. ………………………………………… 5分

(2) 证明：因为 $a,b\in M$，所以 $|a|<1,|b|<1$. ………………………………………… 7分

所以 $|ab|-(|a|+|b|)+1=(|a|-1)(|b|-1)>0$. ………………………………………… 9分

所以 $|ab|-|a|-|b|+1>0$. ………………………………………… 10分