绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学试题参考答案

一、选择题

1. C　2. C　3. B　4. B　5. D　6. A
7. B　8. A　9. A　10. B　11. C　12. D

二、填空题

13. $y=3x$　14. $\frac{121}{3}$　15. 0.18　16. 2

三、解答题

17．解：

（1）由已知得 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，故由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$．

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$．

因为 $0^\circ<A<180^\circ$，所以 $A=60^\circ$．

（2）由（1）知 $B=120^\circ-C$，由题设及正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A+\sin(120^\circ-C)=2\sin C$，

即 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，可得 $\cos(C+60^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

由于 $0^\circ<C<120^\circ$，所以 $\sin(C+60^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin(C+60^\circ-60^\circ)\\&=\sin(C+60^\circ)\cos 60^\circ-\cos(C+60^\circ)\sin 60^\circ\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

18．解：

（1）连结 B_1C，ME．因为 M，E 分别为 BB_1，BC 的中点，所以 $ME\,//\,B_1C$，且 $ME=\frac{1}{2}B_1C$．又因为 N 为 A_1D 的中点，所以 $ND=\frac{1}{2}A_1D$．

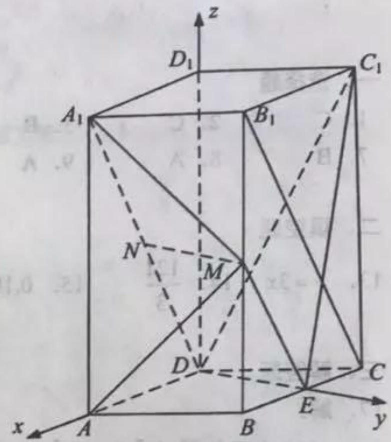
由题设知 $A_1B_1 \underline{\parallel} DC$，可得 $B_1C \underline{\parallel} A_1D$，故 $ME \underline{\parallel} ND$，因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形，$MN\,//\,ED$．又 $MN\not\subset$ 平面 EDC_1，所以 $MN\,//$ 平面 C_1DE．

（2）由已知可得 $DE \perp DA$．以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,4)$，$M(1,\sqrt{3},2)$，$N(1,0,2)$，$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$，

$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$，

$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$．



设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 A_1MA 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0.\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ -4z=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$．

设 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$ 为平面 A_1MN 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0.\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\ -p-2r=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$．

于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．

19．解：

设直线 l：$y=\dfrac{3}{2}x+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

（1）由题设得 $F(\dfrac{3}{4},0)$，故 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+\dfrac{3}{2}$，由题设可得 $x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$．

由 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t,\\ y^2=3x\end{cases}$ 可得 $9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{12(t-1)}{9}$．

从而 $-\dfrac{12(t-1)}{9}=\dfrac{5}{2}$，得 $t=-\dfrac{7}{8}$．

所以 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$．

（2）由$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$可得$y_1=-3y_2$．

由$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+t, \\ y^2=3x \end{cases}$可得$y^2-2y+2t=0$．

所以$y_1+y_2=2$．从而$-3y_2+y_2=2$，故$y_2=-1$，$y_1=3$．

代入C的方程得$x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$．

故$|AB|=\frac{4\sqrt{13}}{3}$．

20．解：

（1）设$g(x)=f'(x)$，则$g(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$．

当$x\in(-1,\frac{\pi}{2})$时，$g'(x)$单调递减，而$g'(0)>0$，$g'(\frac{\pi}{2})<0$，可得$g'(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2})$有唯一零点，设为α．则当$x\in(-1,\alpha)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$时，$g'(x)<0$．

所以$g(x)$在$(-1,\alpha)$单调递增，在$(\alpha,\frac{\pi}{2})$单调递减，故$g(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2})$存在唯一极大值点，即$f'(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2})$存在唯一极大值点．

（2）$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$．

（ⅰ）当$x\in(-1,0]$时，由（1）知，$f'(x)$在$(-1,0)$单调递增，而$f'(0)=0$，所以当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(-1,0)$单调递减．又$f(0)=0$，从而$x=0$是$f(x)$在$(-1,0]$的唯一零点．

（ⅱ）当$x\in(0,\frac{\pi}{2}]$时，由（1）知，$f'(x)$在$(0,\alpha)$单调递增，在$(\alpha,\frac{\pi}{2})$单调递减，而$f'(0)=0$，$f'(\frac{\pi}{2})<0$，所以存在$\beta\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$，使得$f'(\beta)=0$，且当$x\in(0,\beta)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(\beta,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)<0$．故$f(x)$在$(0,\beta)$单调递增，在$(\beta,\frac{\pi}{2})$单调递减．

又$f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>0$，所以当$x\in(0,\frac{\pi}{2}]$时，$f(x)>0$．从而，$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2}]$没有零点．

（iii）当$x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$单调递减. 而$f(\frac{\pi}{2})>0$，$f(\pi)<0$，所以$f(x)$在$(\frac{\pi}{2},\pi]$有唯一零点.

（iv）当$x\in(\pi,+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$，所以$f(x)<0$，从而$f(x)$在$(\pi,+\infty)$没有零点.

综上，$f(x)$有且仅有2个零点.

21．解：

（1）X的所有可能取值为$-1,0,1$.

$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$，

$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$，

$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$.

所以X的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）（i）由（1）得$a=0.4$，$b=0.5$，$c=0.1$.

因此$p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}$，故$0.1(p_{i+1}-p_i)=0.4(p_i-p_{i-1})$，即

$$p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1}).$$

又因为$p_1-p_0=p_1\neq0$，所以$\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$为公比为4，首项为$p_1$的等比数列.

（ii）由（i）可得

$$\begin{aligned}p_8&=p_8-p_7+p_7-p_6+\cdots+p_1-p_0+p_0\\&=(p_8-p_7)+(p_7-p_6)+\cdots+(p_1-p_0)\\&=\frac{4^8-1}{3}p_1.\end{aligned}$$

由于$p_8=1$，故$p_1=\frac{3}{4^8-1}$，所以

$$\begin{aligned}p_4&=(p_4-p_3)+(p_3-p_2)+(p_2-p_1)+(p_1-p_0)\\&=\frac{4^4-1}{3}p_1\\&=\frac{1}{257}.\end{aligned}$$

p_4表示最终认为甲药更有效的概率. 由计算结果可以看出，在甲药治愈率为0.5，乙药治愈率为0.8时，认为甲药更有效的概率为$p_4=\frac{1}{257}\approx0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

22．解：

（1）因为$-1<\frac{1-t^2}{1+t^2}\leqslant 1$，且$x^2+(\frac{y}{2})^2=(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=1$，所以$C$的直角坐标方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1\ (x\neq -1)$．

l的直角坐标方程为$2x+\sqrt{3}y+11=0$．

（2）由（1）可设C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数，$-\pi<\alpha<\pi$）．

C上的点到l的距离为

$$\frac{|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11|}{\sqrt{7}}=\frac{4\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})+11}{\sqrt{7}}.$$

当$\alpha=-\frac{2\pi}{3}$时，$4\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})+11$取得最小值7，故$C$上的点到$l$距离的最小值为$\sqrt{7}$．

23．解：

（1）因为$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ac$，又$abc=1$，故有

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$．

（2）因为a，b，c为正数且$abc=1$，故有

$$\begin{aligned}(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3&\geqslant 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}\\&=3(a+b)(b+c)(a+c)\\&\geqslant 3\times(2\sqrt{ab})\times(2\sqrt{bc})\times(2\sqrt{ac})\\&=24.\end{aligned}$$

所以$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$．

[redacted]