高三家长圈
niujiazhang.com

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案

一、选择题

1. C	2. C	3. B	4. B	5. D	6. A
7. B	8. A	9. A	10. B	11. C	12. D

二、填空题

13. y=3x　　14. $40\frac{1}{3}$　　15. 0.18　　16. 2

三、解答题

17.

17. 解：(1) $\because (\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\cdot\sin C$

$\therefore \sin^2 B-2\sin B\cdot\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A-\sin B\cdot\sin C$

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore b^2-2bc+c^2=a^2-bc$ ------ 2′

$b^2+c^2-a^2=bc$

$\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ------ 3′

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$ ------ 4′

$\because A\in(0,\pi)$

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$ ------ 5′

(2) $\because \sqrt{2}a+b=2c$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$\therefore \sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$ --- 6′

$\because A=\frac{\pi}{3}$

$\therefore B=\frac{2}{3}\pi-C$

$\frac{\sqrt{6}}{2}+\sin(\frac{2}{3}\pi-C)=2\sin C$

$\sin C=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})$

$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ---- 12′

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\frac{1}{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ --- 9'

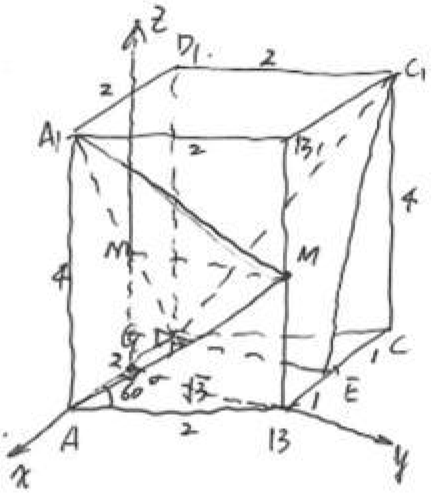
$\because$ $C\in(0,\frac{2\pi}{3})$

$\therefore$ $C-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$

$\therefore$ $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ --- 10'

18.

18.（12分）



(1) 证明：取AD中点G，连结BG，NG.

则 N为A_1D中点

在$\triangle A_1AD$中 $NG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_1A$

由直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$

则 $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$.

由M为B_1B中点 则 $MB \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_1A$.

$\therefore$ $NG \mathrel{\underline{\parallel}} MB$

则四边形NGBM为平行四边形.

则 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} BG$ —— 2'

在底面菱形ABCD中，E为BC中点

则 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} GD$. 则四边形BEDG为平行四边形. —— 3'

所以 $BG \mathrel{\underline{\parallel}} DE$. —— 4'

由 $MN \not\subset$ 平面C_1DE

$DE \subset$ 平面C_1DE

$\therefore$ $MN \parallel$ 平面C_1DE —— 6'

高三家长圈
niujiazhang.com

(2) 在底面菱形 $ABCD$ 中 $\because \angle BAD=60^\circ$ G 为 AD 中点

所以 $BG\perp AD$ 以 G 为原点 GA. GB. GN 所在直线为 x. y. z 轴

建立空间直角坐标系，设 $AA_1=4$. $AB=2$. ——— 7'

设 $G(0,0,0)$. 则 $A(1,0,0)$. $B(0,\sqrt{3},0)$

$N(0,0,2)$, $A_1(1,0,4)$. $M(0,\sqrt{3},2)$ ——— 8'

所以 $\overrightarrow{NM}=(0,\sqrt{3},0)$ $\overrightarrow{NA_1}=(1,0,2)$ $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$. $\overrightarrow{AM}=(-1,\sqrt{3},2)$

设平面 A_1AM 的法向量为 $\vec{m}$，平面 A_1MN 的法向量为 $\vec{n}$ ———

则 设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4z_1=0\\ -x_1+\sqrt{3}y_1+2z_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=0\\ x_1=\sqrt{3}y_1\end{cases}$$ 则 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,0)$ —— 9'

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{NA_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}y_2=0\\ x_2+2z_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_2=0\\ x_2=-2z_2\end{cases}$$ 则 $\vec{n}=(-2,0,1)$

—— 10'

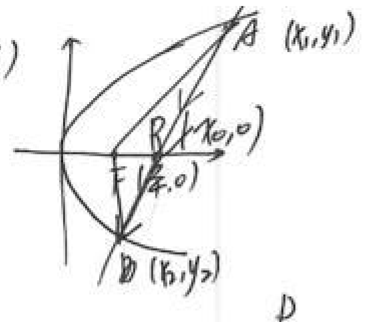
设二面角 $A-MA_1-N$ 的平面角为 θ

则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ——— 11'

则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

所以求得二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ——— 12'

19. 19. (1)



设 l: $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+b\\ y^2=3x\end{cases}$

$(\frac{3}{2}x+b)^2=3x$

$\frac{9}{4}x^2+3bx+b^2=3x$

$\frac{9}{4}x^2+(3b-3)x+b^2=0$.

$x_1+x_2=\dfrac{3-3b}{\frac{9}{4}}=\dfrac{4-4b}{3}$

$|AF|+|BF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}$

$=\dfrac{4-4b}{3}+\dfrac{3}{2}=4$

$17-24$

$8-8b+9=24$

$-7=8b$

$b=-\frac{7}{8}$

$\therefore l: y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$

(2) $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$

$(x_0-x_1,-y_1)=3(x_2-x_0,y_2)$.

$-y_1=3y_2$.

$y_1=-3y_2$

$-3y_2+y_2=2$

$-2y_2=2$

$\begin{cases} y_2=-1 \\ y_1=3. \end{cases}$

$|AB|=\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}\cdot(y_1-y_2)$

$=\sqrt{1+\frac{4}{9}}\cdot 4$

$=\sqrt{\frac{13}{9}}\cdot 4=\frac{4\sqrt{13}}{3}$

$y-b=\frac{3}{2}x$

$x=\frac{2(y-b)}{3}$.

$y^2=2y-2b$

$y^2-2y+2b=0$.

$\begin{cases} y_1+y_2=2 \\ y_1y_2=2b=-3. \end{cases}$

$-3=2b$

$b=-\frac{3}{2}$.

20.

20. (1) $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$, -- 1' $f''(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$ -- 2'

∵ $y=-\sin x$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，$y=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

∴ $f''(x)$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减. -- 3'

∵ $f''(0)=1>0$, $f''(\frac{\pi}{2})=-1+\frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^2}=-1+\frac{4}{(2+\pi)^2}<0$. -- 4'

∴ $f''(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$. -- 5'

∴

x	$(-1,x_0)$	x_0	$(x_0,\frac{\pi}{2})$
$f''(x)$	+	0	−
$f'(x)$	↗	极大值	↘

∴ $f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点. -- 6'

(2) $f(x)=\sin x-\ln(1+x)=0$, 则 $\sin x=\ln(1+x)$

∵ $\sin x\in[-1,1]$, ∴ $\ln(1+x)\in[-1,1]$, ∴ $x\in[\frac{1}{e}-1,e-1]$.

∴ $f(x)$ 只在 $[\frac{1}{e}-1,e-1]$ 上存在零点. -- 7'

∵ $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$, 令 $f'(x)=0$.

由(1), $f'(0)=0$. -- 8' $f'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2+\sqrt{2}}>0$, $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}<0$

∴ $f'(x)$ 存在唯一 $m\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, 使 $f'(m)=0$. -- 9'

高三家长圈
niujiazhang.com

x	$\frac{1}{e}-1$	$(\frac{1}{e}-1,0)$	0	$(0,m)$	m	$(m,e-1)$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	极小值	↗	极大值	↘	······10'

$\because f(0)=0$ ······11' $f(m)>0$, $f(e-1)=\sin(e-1)-\ln(1+e-1)=\sin(e-1)-1<0$

$\therefore f(x)$在$(m,e-1)$存在唯一零点. ······12'

$\therefore f(x)$有且仅有2个零点.

21.

21. (1) X可取 -1, 0, 1.

$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$ ······1'

$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)=2\alpha\beta+1-\alpha-\beta$ ······2'

$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$ ······3'

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$2\alpha\beta+1-\alpha-\beta$	$\alpha(1-\beta)$

······4'

(2)(i) $\because \alpha=0.5$, $\beta=0.8$

$\therefore a=0.5\times0.8=0.4$

$b=0.8+1-0.5-0.8=0.5$

$c=0.5\times0.2=0.1$

$p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}$ ······6'

$\therefore 0.5p_i=0.4p_{i-1}+0.1p_{i+1}$

$5p_i=4p_{i-1}+p_{i+1}$

$p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})$

$\therefore \dfrac{p_{i+1}-p_i}{p_i-p_{i-1}}=4.$ ······8'

$\therefore \{p_{i+1}-p_i\}$为以4为公比的等比数列

高三家长圈
niujiazhang.com

等比数列.

(ii) 由(i)知, $\{p_{i+1}-p_i\}$ 为 4 为公比, p_1-p_0 为首项的等比数列, 设其前 n 项和为 S_n.

此数列的前 8 项和 $S_8=(p_8-p_7)+(p_7-p_6)+\cdots+(p_1-p_0)=p_8-p_0=\frac{(p_1-p_0)(1-4^8)}{1-4}$

$\because p_0=0$ $\therefore p_8=\frac{p_1(4^8-1)}{3}$ ---- 10'

同理 $S_4=(p_4-p_3)+(p_3-p_2)+(p_2-p_1)+(p_1-p_0)=p_4-p_0=\frac{(p_1-p_0)(1-4^4)}{1-4}$ $\therefore p_4=\frac{p_1(4^4-1)}{3}$

$\therefore \frac{p_8}{p_4}=\frac{\frac{p_1(4^8-1)}{3}}{\frac{p_1(4^4-1)}{3}}=\frac{4^8-1}{4^4-1}=4^4+1=257$ 又$\because p_8=1$ $\therefore p_4=\frac{1}{257}$. --- 11'

因此求解后的结论与甲、乙两者开始赋予的分数无关，说明其制定值具有公平性，只与甲乙两者比值有关 ---12

22.

22. 解: (1) 设 $t=\tan\frac{\theta}{2}$. 则 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. --- 3'

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 得直线 l 的直角坐标方程为

$2x+\sqrt{3}y+11=0$. ----- 5'

(2) C 上的点 $(\cos\theta, 2\sin\theta)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+11|}{\sqrt{4+3}}$$ ----- 7'

$$=\frac{|4\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+11|}{\sqrt{7}}$$ --- 9'

$\therefore$ 当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=-1$ 时, d 的最小值为 $\sqrt{7}$. --- 10'

高三家长圈
niujiazhang.com

23. 23. 证明：(1) 欲证 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$

需证 $\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{c}\le a^2+b^2+c^2$　　1分

$bc+ac+ab\le a^2+b^2+c^2$

$2ac+2ab+2bc\le 2a^2+2b^2+2c^2$

$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2\ge 0$　　3分.

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$

$\because a,b,c$ 为正数，且 $abc=1$　　4分.

$\therefore (a-b)^2\ge 0$，$(a-c)^2\ge 0$，$(b-c)^2\ge 0$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"="成立.

即 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$ 得证.　　5分.

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$

(2) $\because a,b,c$ 为正数，且满足 $abc=1$.

$\therefore a+b\ge 2\sqrt{ab}=2\sqrt{\frac{1}{c}}$　$b+c\ge 2\sqrt{bc}=2\sqrt{\frac{1}{a}}$　$a+c\ge 2\sqrt{ac}=2\sqrt{\frac{1}{b}}$　　1分

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"="成立.　　2分

$\therefore (a+b)^3\ge 8(\sqrt{\frac{1}{c}})^3$　$(b+c)^3\ge 8(\sqrt{\frac{1}{a}})^3$　$(a+c)^3\ge 8(\sqrt{\frac{1}{b}})^3$　　3分.

又 $\because (\sqrt{\frac{1}{c}})^3+(\sqrt{\frac{1}{a}})^3+(\sqrt{\frac{1}{b}})^3\ge 3\sqrt{\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}=3\sqrt{\frac{1}{abc}}=3$　　4分.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"="成立.

$\therefore (a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3\ge 8[(\sqrt{\frac{1}{a}})^3+(\sqrt{\frac{1}{b}})^3+(\sqrt{\frac{1}{c}})^3]\ge 24$　　5分.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"="成立

高三家长圈
niujiazhang.com

高考

高三家长圈

及时/有料/实用/干货

高考

[redacted]