2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题参考答案

一、选择题

1. C　2. C　3. B　4. B　5. D　6. C

7. D　8. B　9. A　10. D　11. A　12. B

二、填空题

13. y=3x　14. $\frac{5}{8}$　15. -x　16. $\sqrt{2}$

三、解答题

17.

17. 1) 设男顾客对该商场服务满意为事件A. $P(A)=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$

设女顾客对该商场服务满意为事件B $P(B)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$

2) $K^2=\frac{100(40\times20-10\times30)^2}{50\times50\times70\times30}=\frac{100\times500^2}{50\times50\times70\times30}=\frac{100}{21}\approx4.762\in(3.841,6.635)$

∴ 有95%把握认为男女评价有差异

18.

18. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

依题 $9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=-a_1-4d$.

整理得 $a_1+4d=0$. —— 2分

(1) 由 $a_5=4$ 得 $a_1+2d=4$. —— 1分

又∵ $a_1+4d=0$.

∴ $d=-2$, $a_1=8$.

∴ $a_n=-2n+10$. —— 2分

(2) 由 $S_n\geqslant a_n$ 得 $(n-1)a_1+\frac{n(n-1)}{2}d\geqslant(n-1)d$. * —— 1分

①当$n=1$时, $S_n=a_n$ 成立 —— 1分

由 $a_1>0$, $a_1+4d=0$. 得 $d<0$ —— 2分.

②当$n\geqslant 2$时, 由*得 $\frac{n}{2}d\geqslant d-a_1$.

解得 $n\leqslant 2-\frac{2a_1}{d}=10$. —— 2分

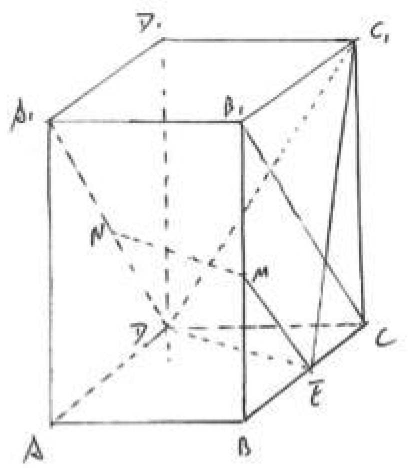
∴ $2\leqslant n\leqslant 10$

由①②可知: $1\leqslant n\leqslant 10$ 且 $n\in N$. —— 1分

19.

19.

(1) 证明, 连ME, B_1C.



∵直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$

∴ $A_1B_1 \parallel CD$（平行且相等）

∴四边形A_1B_1CD是平行四边形

∴ $A_1D \parallel B_1C$（平行且相等）

又∵ E, M, N分别是BC, BB_1, A_1D的中点.

∴ $ME \parallel \frac{1}{2}B_1C \parallel ND$（平行且相等）

∴四边形$NMED$是平行四边形 ------ 4分

∴ $MN \parallel DE$

∵ $DE\subset$平面C_1DE, $MN\not\subset$平面C_1DE

∴ $MN\parallel$平面C_1DE ------ 6分

20.

20 ① $f'(x)=2\cos x-(\cos x-x\sin x)-1 \quad (0<x<\pi)$

$=2\cos x-\cos x+x\sin x-1$

$=\cos x+x\cdot\sin x-1$

令 $g(x)=\cos x+x\sin x-1 \quad 0<x<\pi$

则 $g'(x)=-\sin x+\sin x+x\cdot\cos x$

$=x\cdot\cos x$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$x\cdot\cos x>0$

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$x\cdot\cos x<0$

$\therefore g(x)_{极大}=g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0$

又 $g(0)=0$，$g(\pi)=-2$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点.

即 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点.

② 由①可知 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点.

即存在 x_0，使得 $f'(x_0)=0$

所以有 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上，$f(x)$ 单调递增.

在 $[x_0,\pi]$ 上单调递减

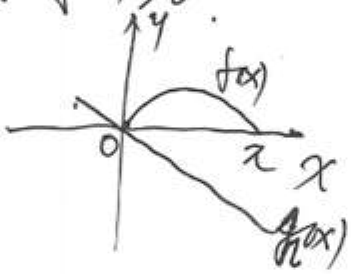
又 $f(0)=0$. $f(\pi)=0$.

$\therefore f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 $f(x)\geq 0$

令 $h(x)=ax$ 如图所示

$\because f(x)\geq ax$ 成立.

$\therefore a\leq 0$



21. (1)解：∵⊙M过点A.B ∴M在线段AB的中垂线上，即 $y=x$ 上. ……1分

设⊙M：$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2\ (r>0)$ …… 2分

∵⊙M与 $x=-2$ 相切 ∴ $|a+2|=r$ ① …… 3分

又∵ $A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ∴ $(\sqrt{2}-a)^2+(-\sqrt{2}-a)^2=r^2$ ② … 4分

①②联立解得 $\begin{cases}a=0\\ r=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\ r=6\end{cases}$ ∴ $r=4$ 或 $r=6$ …… 5分

(2) ∵线段AB是⊙M的一条弦 ∴M在线段AB的中垂线上.

设 $M(x,y)$ 则 $|MA|^2=|MO|^2+|OA|^2$ …… 7分

又∵⊙M与 $x+2=0$ 相切 ∴ $|MA|=|x+2|$ …… 8分

∴ $|x+2|^2=|MO|^2+|OA|^2$

∴ $x^2+4x+4=x^2+y^2+4$ 即 $y^2=4x$ …… 9分

∴M的轨迹是以 $F(1,0)$ 为焦点，$x=-1$ 为准线的抛物线

∴ $|MA|-|MP|=$ $x+2-|MP|=(x+1)+1-|MP|$

$=|MF|-|MP|+1$ …… 10分

若 $|MA|-|MP|$ 为定值，则P与F重合，即 $P(1,0)$ …… 11分

∴存在定点 $P(1,0)$ 使得 $|MA|-|MP|$ 为定值. …… 12分

22.

22. 解：(1) 设 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$

∴ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. ……3′

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 得直线 l 的直角坐标方程为

$2x+\sqrt{3}y+11=0$. ……5′

(2) C 上的点 $(\cos\theta, 2\sin\theta)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+11|}{\sqrt{4+3}}$$ ……7′

$$=\frac{|4\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+11|}{\sqrt{7}}$$ ……9′

∴ 当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=-1$ 时，d 的最小值为 $\sqrt{7}$. ……10′

(2) ∵ a, b, c 为正数，且满足 $abc=1$.

∴ $a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{\frac{1}{c}}$ $\quad b+c\geq 2\sqrt{bc}=2\sqrt{\frac{1}{a}}$ $\quad a+c\geq 2\sqrt{ac}=2\sqrt{\frac{1}{b}}$ 1分

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，“=”成立. 2分

∴ $(a+b)^3\geq 8(\sqrt{\frac{1}{c}})^3$ $\quad (b+c)^3\geq 8(\sqrt{\frac{1}{a}})^3$ $\quad (a+c)^3\geq 8(\sqrt{\frac{1}{b}})^3$ 3分.

又 ∵ $(\sqrt{\frac{1}{c}})^3+(\sqrt{\frac{1}{a}})^3+(\sqrt{\frac{1}{b}})^3\geq 3\sqrt{\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}=3\sqrt{\frac{1}{abc}}=3$ 4分.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，“=”成立.

∴ $(a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3\geq 8[(\sqrt{\frac{1}{a}})^3+(\sqrt{\frac{1}{b}})^3+(\sqrt{\frac{1}{c}})^3]\geq 24$ 5分.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，“=”成立

23

23. 证明：(1) 欲证 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$

需证 $\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{c}\le a^2+b^2+c^2$ 　　1分

$bc+ac+ab\le a^2+b^2+c^2$

$2ac+2ab+2bc\le 2a^2+2b^2+2c^2$

$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2\ge 0$ 　　3分.

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$

$\because a,b,c$ 为正数，且 $abc=1$ 　　4分.

$\therefore (a-b)^2\ge 0,\ (a-c)^2\ge 0,\ (b-c)^2\ge 0$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"=" 成立.

即 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$ 得证. 　　5分.

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$

(2) $\because a,b,c$ 为正数，且满足 $abc=1$.

$\therefore a+b\ge 2\sqrt{ab}=2\sqrt{\frac{1}{c}}$ 　$b+c\ge 2\sqrt{bc}=2\sqrt{\frac{1}{a}}$ 　$a+c\ge 2\sqrt{ac}=2\sqrt{\frac{1}{b}}$ 　　1分

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"=" 成立. 　　2分

$\therefore (a+b)^3\ge 8(\sqrt{\frac{1}{c}})^3$ 　$(b+c)^3\ge 8(\sqrt{\frac{1}{a}})^3$ 　$(a+c)^3\ge 8(\sqrt{\frac{1}{b}})^3$ 　　3分.

又 $\because (\sqrt{\frac{1}{c}})^3+(\sqrt{\frac{1}{a}})^3+(\sqrt{\frac{1}{b}})^3\ge 3\sqrt{\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}=3\sqrt{\frac{1}{abc}}=3$ 　　4分.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"=" 成立.

$\therefore (a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3\ge 8[(\sqrt{\frac{1}{a}})^3+(\sqrt{\frac{1}{b}})^3+(\sqrt{\frac{1}{c}})^3]\ge 24$ 　　5分.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，"=" 成立

[redacted]