

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学全国 1 卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

A. $\{x | -4 < x < 3\}$

B. $\{x | -4 < x < -2\}$

C. $\{x | -2 < x < 2\}$

D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z - i| = 1$, z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则

A. $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

B. $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

C. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

D. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$

3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐到足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称之为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此。此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105cm，头顶至脖子下端的长度为 26cm，则其身高可能是

A. 165 cm

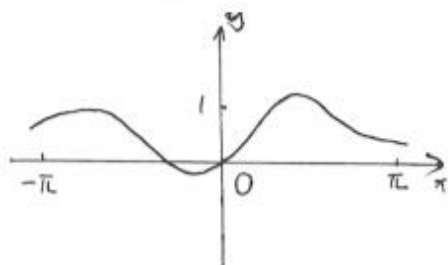
B. 175 cm



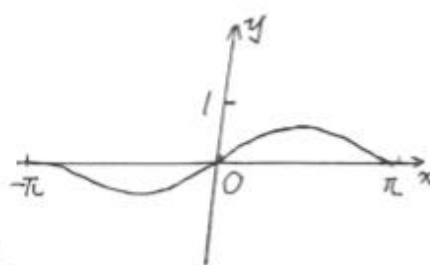
C. 185 cm

D. 190 cm

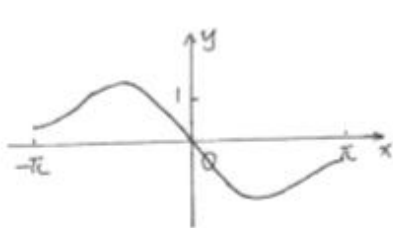
5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 的 $[-\pi, \pi]$ 图像大致为



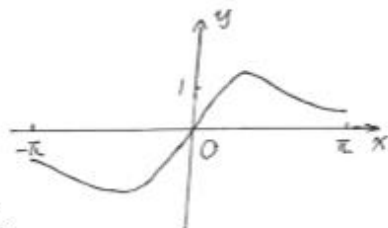
A.



B.



C.



D.

6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化，每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成，爻分为阳爻“—”和阴爻“--”，右图就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有3个阳爻的概率是



A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{11}{16}$

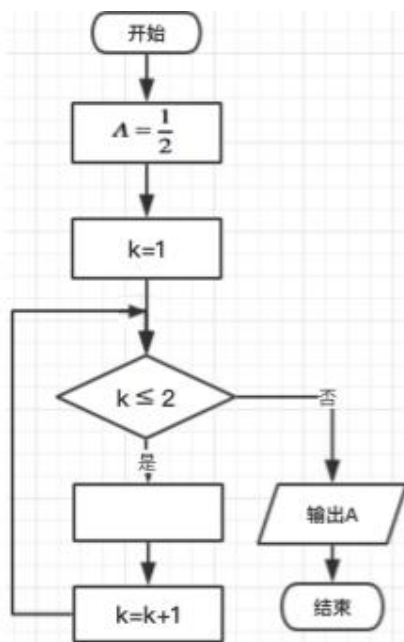
7. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$ ，且 $(a-b) \perp b$ ，则 a 与 b 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 右图是求 $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应

填入

D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$



9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则

A. $a_n = 2n - 5$ B. $a_n = 3n - 10$ C. $S_n = 2n^2 - 8n$ D. $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. 关于函数 $f(x) = \sin |x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增

④ $f(x)$ 的最大值是 2

其中所有正确结论的编号是

D. ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点 $\angle CEF=90^\circ$, 则球 O 的体积为

D. $\sqrt{6} \pi$



二、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____。

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=\frac{1}{2}$ ， $a_4^2=a_6$ ，则 $S_5=$ _____。

15. 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）。根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”。设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，甲队以 4:1 获胜的概率是_____。

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点。若 $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$ ，则 C 的离心率为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$ 。

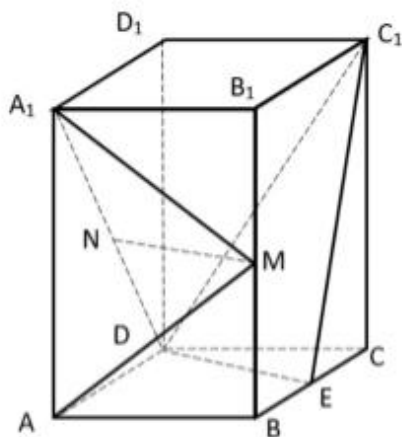
(1) 求 A ；

(2) 若 $\sqrt{2}a + b = 2c$ ，求 $\sin C$ 。

18. (12 分)

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形， $AA_1=4$ ， $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ，

E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点。



(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值。

19. (12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点为 F , 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 与 x

轴的交点为 P 。

(1) 若 $|AF| + |BF| = 4$, 求 l 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$ 。

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 存在唯一极大值点；

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. (12分)

为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验. 试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验，对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β ，一轮试验中甲药的得分记为 X .

(1) 求 X 的分布列；

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分， $p_i (i=0,1,\dots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$ ， $p_8=1$ ，

$p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} (i=1,2,\dots,7)$ ，其中 $a=P(X=-1)$ ， $b=P(X=0)$ ，

$c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5$ ， $\beta=0.8$.

(i) 证明： $\{p_{i+1}-p_i\} (i=0,1,2,\dots,7)$ 为等比数列

(ii) 求 p_4 ，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$
，以坐标原

点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为

$$2p \cos \theta + \sqrt{3} p \sin \theta + 11 = 0$$

- (1) 求 C 和 l 的直角坐标方程；
- (2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. [选修4-5：不等式选讲] (10分)

已知 a, b, c 为正数，且满足 $abc=1$. 证明：

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;

(2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$



高三家长圈

及时/有料/实用/干货

