

2019 年高中毕业年级第三次质量预测

文科数学试题卷

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。考试时间 120 分钟，满分 150。考生应首先阅读答题卡上的文字信息，然后在答题卡上作答，在试题卷上作答无效。交卷时只交答题卡。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

- 已知集合 $A = \{x \in N | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | 0 < x < \pi\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | 0 < x < 3\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{x | 0 < x < \pi\}$
- 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1-i) = 2+i$ ，则在复平面内 \bar{z} 对应的点在
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 我国古代有着辉煌的数学研究成果，其中的《周算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《辑古算经》，有丰富多彩的内容，是了解我国古代数学的重要文献。这 5 部专著中有 3 部产生于汉、魏、晋、南北朝时期。某中学拟从这 5 部专著中选择两部作为“数学文化”校本课程学习内容，则所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为
 A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{10}$
- 已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{2})$ ，则双曲线的离心率为
 A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3
- 同时具有性质“①最小正周期是 π ；②图像关于 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称；③在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上是增函数”的一个函数可以是
 A. $y = \sin\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right)$ B. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
 C. $y = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ D. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
- 在 $\triangle ABC$ 中，若点 D 满足 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DB}$ ，点 M 为 AC 中点，则 $\overrightarrow{MD} =$
 A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

7. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$ ，且函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，若 $a = f(-1)$, $b = f(\log^2 4)$, $c = f(2^{0.3})$ ，则 a, b, c 的大小关系为

- A. $c < b < a$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$

8. 在轴截面顶角为直角的圆锥内，作一内接圆柱，若圆柱的表面积等于圆锥的侧面积，则圆锥的底面半径与圆柱的底面半径之比为

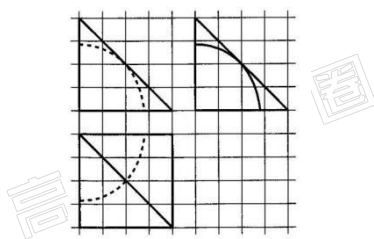
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

9. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，满足 $a_1 = b_1 = 1, a_{n+1} - a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3, n \in \mathbf{N}^*$ ，则数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和为

- A. $\frac{1}{2}(3^{10} - 1)$ B. $\frac{1}{8}(9^{10} - 1)$ C. $\frac{1}{26}(27^9 - 1)$ D. $\frac{1}{26}(27^{10} - 1)$

10. 如图所示，网格纸上的小正方形边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为

- A. $\frac{64 - 8\sqrt{2}\pi}{3}$ B. $\frac{64 - 4\sqrt{2}\pi}{3}$ C. $\frac{64 - 8\pi}{3}$ D. $\frac{64 - 4\pi}{3}$



11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，若 $f(x)$ 满足在 D 内是单调函数。且存在 $[m, n] \subseteq D$ 使 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}]$ ，那么就称 $f(x)$ 为“半保值函数”，若函数 $f(x) = \log_a(a^x + t)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为“半保值函数”，则正数

t 的取值范围是

- A. $(0, \frac{1}{\pi}]$ B. $(0, 1)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$

12. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与双曲线 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 有公共的焦点， C_2 的一条渐近线与以 C_1 的长轴为直径的圆相较于 A, B 两点，若 C_1 恰好将线段 AB 三等分，则

- A. $a^2 = \frac{87}{8}$ B. $a^2 = 12$ C. $b^2 = \frac{9}{8}$ D. $b^2 = 1$

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分。第 12—21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22—23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在答题卡上）

13. 若实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x-3y+3 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z=3x-2y$ 的最大值为_____.

14. 在三棱锥 $D-ABC$ 中， $AB=AC=AD=\sqrt{2}, BC=BD=CD=2$ ，则三棱锥 $D-ABC$ 外接球的表面积为_____.

15. 在数列 $\{a_n\}$ 中，满足 $a_1=1, a_2=4, 2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1} (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$ ，则 $a_8=$ _____.

16. 已知函数 $f(x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2+\ln x$ ，若在区间 $(1,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 的图像恒在直线 $y=2ax$ 的图象的下方，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（一）必考题：共 60 分

17. （本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别是 $a, b, c, AC=4, \cos A = \frac{1}{3}$ ，点 D 在线段 BC 上，且 $BD = \frac{1}{2}BC, AD = \frac{8}{3}$ 。

（I）求 AB 的长；

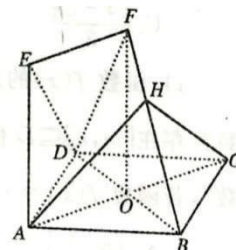
（II）求 $\triangle ABC$ 的面积

18. （本小题满分 12 分）

如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $FO \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $OAEF$ 为平行四边形。

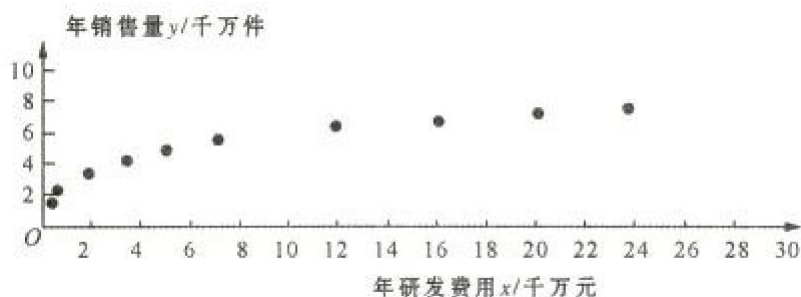
（I）求证：平面 $DEF \perp$ 平面 BDF

（II）若 $AB=FO=BD=2$ ，点 H 在线段 BF 上，且 $\overrightarrow{FH} = \lambda \overrightarrow{FB}$ ，三棱锥 $B-AHC$ 的体积等于三棱锥 $O-DEF$ 的体积，求 λ 的值。



19. (本小题满分 12 分)

某企业为确定下一年投入某种产品的研发费用，需了解年研发费用 x (单位：千万元) 对年销售量 y (单位：千万件) 的影响，统计了近 10 年投入的年研发费用 x_i 与年销售量 y_i ($i=1,2,\dots,10$) 的数据，得到散点图如图所示：



(I) 利用散点图判断， $y = a + bx$ 和 $y = c \cdot x^d$ (其中 c, d 为大于 0 的常数) 哪一个更适合作为年研发费用 x 和年销售量 y 的回归方程类型 (只要给出判断即可，不必说明理由)。

(II) 对数据作出如下处理：令 $u_i = \ln x_i$, $v_i = \ln y_i$ ，得到相关统计量的值如下表：

$\sum_{i=1}^{10} u_i v_i$	$\sum_{i=1}^{10} u_i$	$\sum_{i=1}^{10} v_i$	$\sum_{i=1}^{10} u_i^2$
30.5	15	15	46.5

根据 (I) 的判断结果及表中数据，求 y 关于 x 的回归方程；

(III) 已知企业年利润 z (单位：千万元) 与 x, y 的关系为 $z = \frac{27}{e} y - x$ (其中 $e = 2.71828 \dots$)，根据 (II) 的结果，要使得该企业下一年的年利润最大，预计下一年应投入多少研发费用？

附：附：对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \dots (u_n, v_n)$ ，其回归线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n \bar{u} \bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \bar{u}^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}$$

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $y^2 = -2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ， x 轴上方的点 $M(-2, m)$ 在抛物线上，且 $|MF| = \frac{5}{2}$ ，直线

l 与抛物线交于 A, B 两点 (点 A, B 与 M 不重合)，设直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1, k_2 ，

(1) 求抛物线的方程;

(2) 当 $k_1 + k_2 = -2$ 时, 求证: 直线 l 恒过定点并求出该定点的坐标。

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = ae^x - x$, $g(x) = b \ln x$.

(I) 设 $h(x) = f(x) + g(x)$, 函数 $h(x)$ 在 $(1, h(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x - 1$, 求 a, b 的值

(II) 若 $a = 1$, k 为整数, 当 $x > 0$ 时, $(x - k)f'(x) + x + 1 > 0$ 成立, 求 k 的最大值.

(二) 选考题: 共 60 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

$\begin{cases} x = -2 - t, \\ y = 1 + t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 $C_1: y = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$.

(1) 若直线 l 与 x, y 轴的交点分别为 A, B , 点 P 在 C_1 上, 求 $BA \cdot BP$ 的取值范围;

(2) 若直线 l 与 C_2 交于 M, N 两点, 点 Q 的直角坐标为 $(-2, 1)$, 求 $||QM| - |QN||$ 的值。

23. (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x + 1| + a|x + 2|$.

(I) 求 $a = 1$ 时, $f(x) \leq 3$ 的解集;

(II) 若 $f(x)$ 有最小值, 求 a 取值范围, 并写出相应的最小值。