2019年高中毕业年级第二次质量预测数学（文科）参考答案

一、选择题

BCBDC　ADACB　CB

二、填空题

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$;　14. $[-3,-\frac{4}{3}]$;　15. $\frac{12}{5}$;　16. $(0,\frac{\ln 2}{2}]$.

三、解答题

17. 解：（1）由题意知，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n,$

当 $n\geq 2$ 时有，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}=(n-1)^2+n-1,$ ----------------2 分

两式相减得，$\frac{a_n}{n+1}=2n$，$a_n=2n(n+1).$ ----------------4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=4$ 也符合，所以 $a_n=2n(n+1),n\in\mathbf{N}^*.$ ----------------6 分

（2）$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， ----------------8 分

所以 $S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{2(n+1)}$， ----------------10 分

由 $S_n=\frac{n}{2(n+1)}>\frac{9}{20}$ 得，$n>9$，所以满足条件的最小正整数 n 为 10. ----------------12 分

18. （1）证：连接 PF，ΔPAD 是等边三角形，$\therefore PF\perp AD$，

又底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\therefore BF\perp AD$，

$PF\bigcap BF=F$，$\therefore AD\perp$ 平面 BFP，$PB\subset$ 平面 BFP，$\therefore AD\perp PB$. ----------------4 分

（2）由（1）知 $AD\perp BF, PD\perp BF, AD\bigcap PD=D$，$\therefore BF\perp$ 平面PAD.

$\therefore$ 平面$ABCD\perp$ 平面PAD, 平面$ABCD\bigcap$ 平面$PAD=AD$，

又 $PF\perp AD$，$\therefore PF\perp$ 平面$ABCD$， ----------------6 分

连接 CF 交 DE 于点 H，过 H 作 $HG\,//\,PF$交PC于G, $\therefore GH\perp$ 平面$ABCD$.

又$\because GH\subset$ 平面DEG，$\therefore$ 平面$DEG\perp$ 平面$ABCD$.

$\because \frac{CH}{HF}=\frac{CE}{DF}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{CG}{GP}=\frac{1}{2}$. ----------------10 分

$\therefore GH=\frac{1}{3}PF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$V_{D-CEG}=V_{G-CDE}=\frac{1}{3}S_{\Delta CDE}\cdot GH=\frac{1}{12}$.----------------12 分

19. 解：（1）由频率分布直方图可得：10×（0.01+0.015+a+0.03+0.01）＝1，

解得 a＝0.035，　　----------------2 分

所以通过电子阅读的居民平均年龄为：

20×10×0.01+30×10×0.015+40×10×0.035+50×10×0.03+60×10×0.01＝41.5；-------5 分

（2）

	电子阅读	纸质阅读	合计
青少年	90	20	110
中老年	60	30	90
合计	150	50	200

由表中数据，计算 $K^2=\frac{200(30\times 90-60\times 20)^2}{50\times 150\times 90\times 110}\approx 6.061>5.024$，----------------10 分

∴能有 97.5%以上的把握认为“阅读方式与年龄之间有关系”. ----------------12 分

20. 解：（1）由椭圆的定义可得 2（a+c）＝$4+2\sqrt{3}$，所以 a+c＝$2+\sqrt{3}$①，

当 A 在上（或下）顶点时，$\triangle AF_1F_2$ 的面积取得最大值，即最大值为 $bc=\sqrt{3}$②，

由①②及 $a^2=c^2+b^2$ 联立求得 a＝2，b＝1，c＝$\sqrt{3}$，

可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　　----------------4 分

（2）当 AB 的斜率不存在时，设直线 OA 的方程为：$y=\frac{1}{2}x$，

不妨取点 $A(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，则 $B(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$P(\sqrt{2},0)$，$\therefore |OP|=\sqrt{2}$.　　----------------5 分

当 AB 的斜率存在时,设直线 AB 的方程为：$y=kx+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$. $\because k_1k_2=-\frac{1}{4}$，$\therefore 4y_1y_2+x_1x_2=0$.

$\therefore 4(kx_1+m)(kx_2+m)+x_1x_2=(4k^2+1)x_1x_2+4km(x_1+x_2)+4m^2$

$=4m^2-4-\dfrac{32k^2m^2}{1+4k^2}+4m^2=0$

化简得：$2m^2=1+4k^2,\therefore m^2\geq\dfrac{1}{2}$.　　----------------8 分

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=16(4k^2+1-m^2)=16m^2>0$，

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-4km}{1+4k^2}=\dfrac{-2k}{m}$， $y_0=kx_0+m=\dfrac{1}{2m}$.　　----------------10 分

$\therefore |OP|^2=x_0^2+y_0^2=\dfrac{4k^2}{m^2}+\dfrac{1}{4m^2}=2-\dfrac{3}{4m^2}\in\left[\dfrac{1}{2},2\right)$，$\therefore |OP|\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$.

综上，$|OP|$ 的取值范围为$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$.　　----------------12 分

21. 解：（1）由题知，$f'(x)=a(1+\ln x)-2bx-a=a\ln x-2bx$，

$f'(1)=-2b=-1$, 所以 $b=\dfrac{1}{2}$，又有 $f(1)=-b-a=-\dfrac{3}{2}$，所以 $a=1$.

即 $a=1,b=\dfrac{1}{2}$.　　----------------4 分

（2）当 $a\leq0,b=\dfrac{1}{2}$ 时， $f'(x)=a\ln x-x<0$，

$f(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减. -------5 分

不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，原不等式即为 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<3$, ,

即 $f(x_1)-f(x_2)<3x_2-3x_1$, 即 $f(x_1)+3x_1<f(x_2)+3x_2$,

令 $g(x)=f(x)+3x$, 则 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上为单调递增函数，

所以有 $g'(x)=f'(x)+3=a\ln x-x+3\geq0$ 在 $(1,e)$ 上恒成立.　　---------------8 分

$a\geq\dfrac{x-3}{\ln x},x\in(1,e)$, 令 $h(x)=\dfrac{x-3}{\ln x},x\in(1,e)$， $h'(x)=\dfrac{\ln x+\frac{3}{x}-1}{(\ln x)^2}$,

令 $\varphi(x)=\ln x+\dfrac{3}{x}-1,\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{x-3}{x^2}<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减，$\varphi(x)>\varphi(e)=\dfrac{3}{e}$， $h'(x)>0$, $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，

$h(x)<h(e)=e-3$，所以 $a\geq e-3$.

综上，$e-3\le a\le 0.$ ----------------12 分

22. 解（1）已知曲线C的标准方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$P$的坐标为$\left(-2,0\right)$，

将直线l的参数方程$\begin{cases} x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$与曲线$C$的标准方程$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$联立，

得$t^2-\sqrt{2}t-4=0$，则$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=4$. ------------------5 分

(2)由曲线C的标准方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，可设曲线 C 上的动点$A(2\sqrt{3}\cos\theta,2\sin\theta)$，

则以A 为顶点的内接矩形周长为$4(2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta)=16\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

因此该内接矩形周长的最大值为 16，当且仅当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时等号成立. -------------10 分

23.解（1）当$a=1$时，$x\le -1$ $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+\left|x-1\right|=\begin{cases} -2x, x\le -1, \\ 2,-1<x<1, \\ 2x, x\ge 1, \end{cases}$

当$x\le -1$，$x^2-x\ge -2x, x\le -1$.

当$-1<x<1$，$x^2-x\ge 2, x\le -1或x\ge 2$，舍去.

当$x\ge 1$，$x^2-x\ge 2x, x\ge 3$.综上，原不等式的解集为$\{x\,|\,x\le -1或x\ge 3\}$. ----------------5 分

（2）$f\left(x\right)=\left|ax+1\right|+\left|x-a\right|=\begin{cases} -(a+1)x-1+a, x\le -\dfrac{1}{a}, \\ (a-1)x+1+a,-\dfrac{1}{a}<x<a, \\ (a+1)x+1-a, x\ge a, \end{cases}$

当$0<a\le 1$时，$f_{\min}(x)=f(a)=a^2+1\ge 2, a=1$；

当$a>1$时，$f_{\min}(x)=f(-\dfrac{1}{a})=a+\dfrac{1}{a}\ge 2, a>1$；综上，$a\in[1,+\infty)$. ----------------10 分