

2019 年高中毕业年级第二次质量预测 理科数学试题卷

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 考试时间 120 分钟, 满分 150 分. 考生应首先阅读答题卡上的文字信息, 然后在答题卡上作答, 在试题卷上作答无效. 交卷时只交答题卡.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 若复数 $\frac{b+i}{2+i}$ 为纯虚数, 则实数 b 等于

- A. 3 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. -1

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|y=\ln(1-x^2)\}$, $B=\{y|y=4^{x-2}\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$

- A. $(-1, 0)$ B. $[0, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(-1, 0]$

3. 南宋数学家秦九韶在《数书九章》中提出的秦九韶算法至今仍是多项式求值比较先进的算法, 已知 $f(x) = 2019x^{2018} + 2018x^{2017} + \dots + 2x + 1$, 程序框图设计的是求 $f(x_0)$ 的值, 在 M 处应填的执行语句是

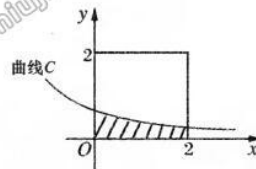
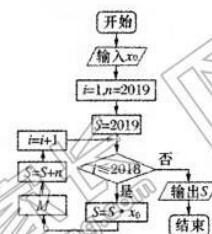
- A. $n=2018-i$
B. $n=2019-i$
C. $n=i+1$
D. $n=i+2$

4. 在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点, 则落入阴影部分(曲线 C 为正态分布 $N(-2, 4)$ 的密度曲线)的点的个数的估计值为
(附: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$.)

- A. 906 B. 2718
C. 1359 D. 3413

5. 将函数 $f(x) = 2\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 然后纵坐标不变, 横坐标变为原来的 2 倍, 得到 $g(x)$ 的图象, 下面四个结论正确的是

- A. 函数 $g(x)$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上的最大值为 1



- B. 将函数 $g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到的图象关于原点对称
- C. 点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 是函数 $g(x)$ 图象的一个对称中心
- D. 函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{2}{3}\pi]$ 上为增函数
6. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2, \\ x+y \geq 1, \\ x-y \leq 1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = (\frac{1}{3})^{3x+y}$ 的最大值为
- A. $(\frac{1}{3})^3$ B. $(\frac{1}{3})^2$ C. 3 D. 4
7. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $CB=2$, $CA=4$, P 在边 AC 的中线 BD 上, 则 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最小值为
- A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. 4 D. -1
8. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的外接球的体积为
- A. $\frac{45\sqrt{5}\pi}{2}$ B. $\frac{135\sqrt{5}\pi}{2}$ C. $180\sqrt{5}\pi$ D. $90\sqrt{5}\pi$
9. 高斯是德国著名的数学家, 近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”的称号, 用其名字命名的“高斯函数”为: 设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y=[x]$ 称为高斯函数. 例如: $[-2.1]=-3$, $[3.1]=3$, 已知函数 $f(x) = \frac{2^x+3}{1+2^{x+1}}$, 则函数 $y=[f(x)]$ 的值域为
- A. $(\frac{1}{2}, 3)$ B. $(0, 2]$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若双曲线上存在点 P 使 $\frac{\sin \angle PF_1F_2}{\sin \angle PF_2F_1} = \frac{2a}{c}$, 则该双曲线的离心率的取值范围是
- A. $\frac{3-\sqrt{17}}{2} < e < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ B. $2 < e < \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ C. $1 < e < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ D. $2 < e < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$
11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2\sqrt{3}$, $BC=2\sqrt{6}$, $\angle ABC=45^\circ$, D 是边 AC 上的一点, 将 $\triangle ABC$ 沿 BD 折叠, 得到三棱锥 $A-BCD$, 若该三棱锥的顶点 A 在底面 BCD 的射影 M 在线段 BC 上, 设 $BM=x$, 则 x 的取值范围是

高三理科数学试题卷 第2页 (共6页)

- A. $(0, 2\sqrt{3})$ B. $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ C. $(\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$ D. $(2\sqrt{3}, 2\sqrt{6})$

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 直线 l 过焦点 F 与抛物线 C 分别交于 A, B 两点, 且直线 l 不与 x 轴垂直, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 $T(5, 0)$, 则 $S_{\triangle AOB} =$

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. $3\sqrt{6}$

第 II 卷 (主观题部分, 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13—21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22—23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填在答题卡上.)

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 设其前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = 2, S_2 = 7$, 则 a_5 的值为_____.

14. 已知 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, 则 $\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) =$ _____.

15. 二项式 $(ax + \frac{\sqrt{3}}{6})^6$ 的展开式中 x^5 的系数为 $\sqrt{3}$, 则 $\int_0^{\pi} \sqrt{x} dx =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = ae^x - \frac{1}{2}x^2 - b$, $(a, b \in \mathbb{R})$, 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n > 0$, 前 n 项和为 S_n , 若 $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, 且 $n \geq 2$).

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

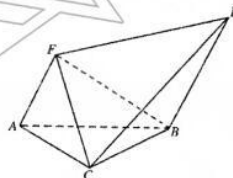
(II) 记 $c_n = a_n \cdot 2^{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 平面 $ABEF \perp$ 平面 ABC , $2AF = AB = BE$, $\angle FAB = 60^\circ$, $AF \parallel BE$.

(I) 求证: $BC \perp BF$;

(II) 求二面角 $F-CE-B$ 的正弦值.



19. (本小题满分 12 分)

目前,浙江和上海已经成为新高考综合试点的“排头兵”,有关其他省份新高考改革的实施安排,教育部部长在十九大上做出明确表态:到 2020 年,我国将全面建立起新的高考制度.新高考规定:语文、数学和英语是考生的必考科目,考生还需从物理、化学、生物、历史、地理和政治六个科目中选取三个科目作为选考科目.若一个学生从六个科目中选出了三个科目作为选考科目,则称该学生的选考方案确定;否则,称该学生选考方案待确定.例如,学生甲选择“物理、化学和生物”三个选考科目,则学生甲的选考方案确定,“物理、化学和生物”为其选考方案.

某校为了解高一年级 840 名学生选考科目的意向,随机选取 60 名学生进行了一次调查,统计选考科目人数如下表:

性别	选考方案确定情况	物理	化学	生物	历史	地理	政治
男生	选考方案确定的有 16 人	16	16	8	4	2	2
	选考方案待确定的有 12 人	8	6	0	2	0	0
女生	选考方案确定的有 20 人	6	10	20	16	2	6
	选考方案待确定的有 12 人	2	8	10	0	0	2

(I) 估计该学校高一年级选考方案确定的学生中选考生物的学生有多少人?

(II) 将联表填写完整,并通过计算判定能否有 99.9% 把握认为选历史是否与性别有关?

	选历史	不选历史	总计
选考方案确定的男生			
选考方案确定的女生			
总计			

(III) 从选考方案确定的 16 名男生中随机选出 2 名,设随机变量 $\xi =$
 $\begin{cases} 0, & 2 \text{ 名男生选考方案不同} \\ 1, & 2 \text{ 名男生选考方案相同} \end{cases}$, 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}, n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

20. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与直线 $l_0: y = x + 2\sqrt{2}$ 相切, 点 A 为圆 C_1 上一动点, $AN \perp x$ 轴于点 N , 且动点 M 满足 $\vec{OM} + \vec{AM} = \vec{ON}$, 设动点 M 的轨迹为曲线 C .

(I) 求曲线 C 的方程;

(II) 设 P, Q 是曲线 C 上两动点, 线段 PQ 的中点为 T , OP, OQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 k_2 = -\frac{1}{4}$, 求 $|OT|$ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 + x) \ln \frac{1}{x} - ax$, $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + (1-a)x^2 - 2ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(I) 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求 $b - 2a$ 的最小值.

高三理科数学试题卷 第 5 页 (共 6 页)

请考生在 22、23 两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线 C

的极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 12$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 直

线 l 与曲线 C 分别交于 M, N 两点.

(I) 若点 P 的极坐标为 $(2, \pi)$, 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的值;

(II) 求曲线 C 的内接矩形周长的最大值.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x) = |ax+1| + |x-a|$ ($a > 0$), $g(x) = x^2 - x$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $g(x) \geq f(x)$ 的解集;

(II) 已知 $f(x) \geq 2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.