

绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 5 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第 I 卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

参考公式：

·如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

·棱柱的体积公式 $V = Sh$.其中 S 表示棱柱的底面面积， h 表示棱柱的高。·如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

·球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.其中 R 表示球的半径。

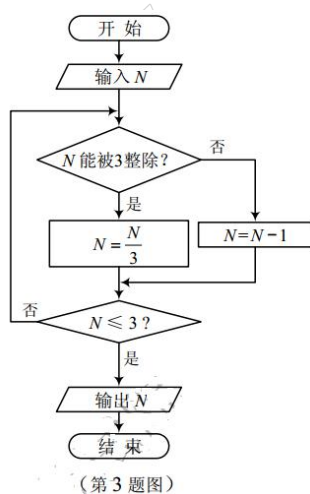
一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$, 则 $(A \cup B) \cap C =$ (A) $\{2\}$ (B) $\{1, 2, 4\}$ (C) $\{1, 2, 4, 6\}$ (D) $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$

(2) 设变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x + y \geq 0, \\ x + 2y - 2 \geq 0, \\ x \leq 0, \\ y \leq 3, \end{cases}$$
 则目标函数 $z = x + y$ 的最大值为

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

(3) 阅读右面的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 24，则输出 N 的值为



- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(4) 设 $\theta \in \mathbf{R}$ ，则 “ $|\theta - \frac{\pi}{12}| < \frac{\pi}{12}$ ” 是 “ $\sin \theta < \frac{1}{2}$ ” 的

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，离心率为 $\sqrt{2}$. 若经过 F 和

$P(0, 4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为

- (A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ (D) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

(6) 已知奇函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数， $g(x) = xf(x)$. 若 $a = g(-\log_2 5.1)$ ， $b = g(2^{0.8})$ ， $c = g(3)$ ，则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $a < b < c$ (B) $c < b < a$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$

(7) 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，其中 $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \pi$. 若 $f(\frac{5\pi}{8}) = 2$ ， $f(\frac{11\pi}{8}) = 0$ ，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π ，则

- (A) $\omega = \frac{2}{3}$ ， $\varphi = \frac{\pi}{12}$ (B) $\omega = \frac{2}{3}$ ， $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$ (C) $\omega = \frac{1}{3}$ ， $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$ (D)

$\omega = \frac{1}{3}$ ， $\varphi = \frac{7\pi}{24}$

(8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1, \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1. \end{cases}$ 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq \frac{x}{2} + a$ 在 \mathbf{R} 上恒

成立, 则 a 的取值范围是

- (A) $[-\frac{47}{16}, 2]$ (B) $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$ (C) $[-2\sqrt{3}, 2]$ (D) $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共 12 小题, 共 110 分。

二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 已知 $a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\frac{a-i}{2+i}$ 为实数, 则 a 的值为 _____.

(10) 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为 _____.

(11) 在极坐标系中, 直线 $4\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) + 1 = 0$ 与圆 $\rho = 2\sin\theta$ 的公共点的个数为 _____.

(12) 若 $a, b \in \mathbf{R}$, $ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为 _____.

(13) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$. 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$, 则 λ 的值为 _____.

(14) 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有 _____ 个. (用数字作答)

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a > b$, $a = 5, c = 6$, $\sin B = \frac{3}{5}$.

(I) 求 b 和 $\sin A$ 的值;

(II) 求 $\sin(2A + \frac{\pi}{4})$ 的值.

16. (本小题满分 13 分)

从甲地到乙地要经过 3 个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的

概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

(I) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

(II) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地，求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

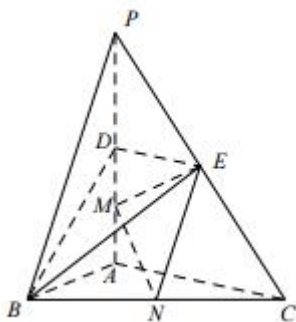
(17) (本小题满分 13 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点， M 是线段 AD 的中点， $PA=AC=4, AB=2$.

(I) 求证： $MN \parallel$ 平面 BDE ；

(II) 求二面角 $C-EM-N$ 的正弦值；

(III) 已知点 H 在棱 PA 上，且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ，求线段 AH 的长.



18. (本小题满分 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列，且公比大于

0, $b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 ($n \in \mathbf{N}^*$).

(19) (本小题满分 14 分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，右顶点为 A ，离心率为 $\frac{1}{2}$. 已知 A 是抛物线

$y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点， F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆的方程和抛物线的方程；

(II) 设 l 上两点 P, Q 关于 x 轴对称，直线 AP 与椭圆相交于点 B (B 异于点 A)，直线 BQ

与 x 轴相交于点 D . 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，求直线 AP 的方程.

(20) (本小题满分 14 分)

设 $a \in \mathbf{Z}$ ，已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 ， $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 求 $g(x)$ 的单调区间；

(II) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ ，函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$ ，求证： $h(m)h(x_0) < 0$ ；

(III) 求证：存在大于 0 的常数 A ，使得对于任意的正整数 p, q ，且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ ，满

足 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}$.

天津理数答案

1-4BDCA 5-8BCAA

9.-2;

10. $\frac{9\pi}{2}$;

11.2;

12.4 ;

13. $\frac{3}{11}$;

14.1080

15. (I) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a > b$, 故由 $\sin B = \frac{3}{5}$, 可得 $\cos B = \frac{4}{5}$. 由已知及余弦定

理, 有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 13$, 所以 $b = \sqrt{13}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

所以, b 的值为 $\sqrt{13}$, $\sin A$ 的值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

(II) 解: 由 (I) 及 $a < c$, 得 $\cos A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, 所以 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{12}{13}$,

$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A = -\frac{5}{13}$. 故 $\sin(2A + \frac{\pi}{4}) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{26}$.

16. (I) 解: 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = (1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) + (1-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{4}) + (1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24},$$

$$P(X=2) = (1-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

所以, 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{13}{12}$.

(II) 解: 设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数, Z 表示第二辆车遇到红灯的个数, 则所求事件

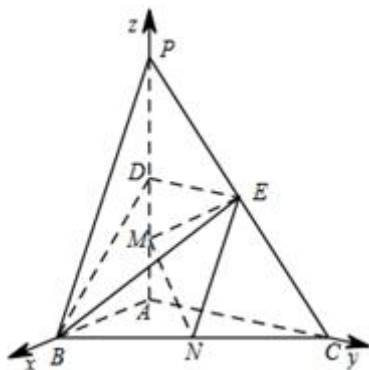
$$P(Y+Z=1) = P(Y=0, Z=1) + P(Y=1, Z=0) = P(Y=0)P(Z=1) + P(Y=1)P(Z=0) \\ = \frac{1}{4} \times \frac{11}{24} + \frac{11}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{48}.$$

所以, 这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率为 $\frac{11}{48}$.

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、二面角、异面直线所成的角等基础知识. 考查用空间向量解决立体几何问题的方法. 考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力. 满分 13 分.

如图, 以 A 为原点, 分别以 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AP} 方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向建立空间直角坐标系. 依题意可得

$A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $P(0, 0, 4)$, $D(0, 0, 2)$, $E(0, 2, 2)$,
 $M(0, 0, 1)$, $N(1, 2, 0)$.



(I) 证明: $\overrightarrow{DE} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{DB} = (2, 0, -2)$. 设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 为平面 BDE 的法向量,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$. 不妨设 $z = 1$, 可得 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$. 又 $\overrightarrow{MN} = (1, 2, -1)$, 可得

$$\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

因为 $MN \not\subset$ 平面 BDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 BDE .

(II) 解: 易知 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$ 为平面 CEM 的一个法向量. 设 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$ 为平面 EMN 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{EM} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases}, \text{ 因为 } \vec{EM} = (0, -2, -1), \vec{MN} = (1, 2, -1), \text{ 所以 } \begin{cases} -2y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}. \text{不妨设 } y = 1,$$

可得 $\vec{n}_2 = (-4, 1, -2)$.

$$\text{因此有 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = -\frac{4}{\sqrt{21}}, \text{ 于是 } \sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{105}}{21}.$$

所以, 二面角 $C-EM-N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{21}$.

(III) 解: 依题意, 设 $AH = h (0 \leq h \leq 4)$, 则 $H(0, 0, h)$, 进而可得 $\vec{NH} = (-1, -2, h)$, $\vec{BE} = (-2, 2, 2)$.

$$\text{由已知, 得 } |\cos \langle \vec{NH}, \vec{BE} \rangle| = \frac{|\vec{NH} \cdot \vec{BE}|}{|\vec{NH}| |\vec{BE}|} = \frac{|2h - 2|}{\sqrt{h^2 + 5} \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{21}, \text{ 整理得 } 10h^2 - 21h + 8 = 0,$$

$$\text{解得 } h = \frac{8}{5}, \text{ 或 } h = \frac{1}{2}.$$

所以, 线段 AH 的长为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

18. 【解析】(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q .

$$\text{由已知 } b_2 + b_3 = 12, \text{ 得 } b_1(q + q^2) = 12, \text{ 而 } b_1 = 2, \text{ 所以 } q^2 + q - 6 = 0.$$

$$\text{又因为 } q > 0, \text{ 解得 } q = 2. \text{ 所以, } b_n = 2^n.$$

$$\text{由 } b_3 = a_4 - 2a_1, \text{ 可得 } 3d - a_1 = 8 \quad \text{①}.$$

$$\text{由 } S_{11} = 11b_4, \text{ 可得 } a_1 + 5d = 16 \quad \text{②},$$

$$\text{联立①②, 解得 } a_1 = 1, d = 3, \text{ 由此可得 } a_n = 3n - 2.$$

所以, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$.

(II) 解: 设数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

$$\text{由 } a_{2n} = 6n - 2, b_{2n-1} = 2 \times 4^{n-1}, \text{ 有 } a_{2n}b_{2n-1} = (3n - 1) \times 4^n,$$

$$\text{故 } T_n = 2 \times 4 + 5 \times 4^2 + 8 \times 4^3 + \cdots + (3n - 1) \times 4^n,$$

$$4T_n = 2 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + 8 \times 4^4 + \cdots + (3n - 4) \times 4^n + (3n - 1) \times 4^{n+1},$$

$$\text{上述两式相减, 得 } -3T_n = 2 \times 4 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \cdots + 3 \times 4^n - (3n - 1) \times 4^{n+1}$$

$$= \frac{12 \times (1-4^n)}{1-4} - 4 - (3n-1) \times 4^{n+1}$$

$$= -(3n-2) \times 4^{n+1} - 8.$$

$$\text{得 } T_n = \frac{3n-2}{3} \times 4^{n+1} + \frac{8}{3}.$$

所以, 数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3n-2}{3} \times 4^{n+1} + \frac{8}{3}$.

19. (I) 解: 设 F 的坐标为 $(-c, 0)$. 依题意, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $\frac{p}{2} = a$, $a-c = \frac{1}{2}$, 解得 $a=1$, $c = \frac{1}{2}$,

$$p=2, \text{ 于是 } b^2 = a^2 - c^2 = \frac{3}{4}.$$

所以, 椭圆的方程为 $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 1$, 抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.

(II) 解: 设直线 AP 的方程为 $x = my + 1 (m \neq 0)$, 与直线 l 的方程 $x = -1$ 联立, 可得点

$P(-1, -\frac{2}{m})$, 故 $Q(-1, \frac{2}{m})$. 将 $x = my + 1$ 与 $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 1$ 联立, 消去 x , 整理得

$$(3m^2 + 4)y^2 + 6my = 0, \text{ 解得 } y = 0, \text{ 或 } y = \frac{-6m}{3m^2 + 4}. \text{ 由点 } B \text{ 异于点 } A, \text{ 可得点}$$

$B(\frac{-3m^2 + 4}{3m^2 + 4}, \frac{-6m}{3m^2 + 4})$. 由 $Q(-1, \frac{2}{m})$, 可学*科.网得直线 BQ 的方程为

$$(\frac{-6m}{3m^2 + 4} - \frac{2}{m})(x+1) - (\frac{-3m^2 + 4}{3m^2 + 4} + 1)(y - \frac{2}{m}) = 0, \text{ 令 } y = 0, \text{ 解得 } x = \frac{2-3m^2}{3m^2 + 2}, \text{ 故}$$

$D(\frac{2-3m^2}{3m^2 + 2}, 0)$. 所以 $|AD| = 1 - \frac{2-3m^2}{3m^2 + 2} = \frac{6m^2}{3m^2 + 2}$. 又因为 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故

$$\frac{1}{2} \times \frac{6m^2}{3m^2 + 2} \times \frac{2}{|m|} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 整理得 } 3m^2 - 2\sqrt{6}|m| + 2 = 0, \text{ 解得 } |m| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 所以 } m = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以, 直线 AP 的方程为 $3x + \sqrt{6}y - 3 = 0$, 或 $3x - \sqrt{6}y - 3 = 0$.

20. (I) 解: 由 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$, 可得 $g(x) = f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 6x - 6$,

进而可得 $g'(x) = 24x^2 + 18x - 6$. 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 或 $x = \frac{1}{4}$.

当 x 变化时, $g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$g'(x)$	+	-	+

$g(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow
--------	------------	------------	------------

所以, $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{4}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{4})$.

(II) 证明: 由 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 得 $h(m) = g(m)(m - x_0) - f(m)$,

$$h(x_0) = g(x_0)(m - x_0) - f(m).$$

令函数 $H_1(x) = g(x)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_1'(x) = g'(x)(x - x_0)$. 由 (I) 知, 当 $x \in [1, 2]$

时, $g'(x) > 0$, 故当 $x \in [1, x_0)$ 时, $H_1'(x) < 0$, $H_1(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_0, 2]$ 时,

$H_1'(x) > 0$, $H_1(x)$ 单调递增. 因此, 当 $x \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ 时,

$H_1(x) > H_1(x_0) = -f(x_0) = 0$, 可得 $H_1(m) > 0$, 即 $h(m) > 0$.

令函数 $H_2(x) = g(x_0)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_2'(x) = g(x_0) - g(x)$. 由 (I) 知, $g(x)$ 在

$[1, 2]$ 上单调递增, 故当 $x \in [1, x_0)$ 时, $H_2'(x) > 0$, $H_2(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_0, 2]$ 时,

$H_2'(x) < 0$, $H_2(x)$ 单调递减. 因此, 当 $x \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ 时, $H_2(x) < H_2(x_0) = 0$,

可得 $H_2(m) < 0$, 即 $h(x_0) < 0$.

所以, $h(m)h(x_0) < 0$.

(III) 证明: 对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$,

令 $m = \frac{p}{q}$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$.

由 (II) 知, 当 $m \in [1, x_0)$ 时, $h(x)$ 在区间 (m, x_0) 内有零点;

当 $m \in (x_0, 2]$ 时, $h(x)$ 在区间 (x_0, m) 内有零点.

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个零点, 不妨设为 x_1 , 则

$$h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0.$$

由 (I) 知 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 故 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$,

$$\text{于是 } \left| \frac{p}{q} - x_0 \right| = \left| \frac{f(\frac{p}{q})}{g(\frac{p}{q})} \right| \geq \frac{|f(\frac{p}{q})|}{g(2)} = \frac{|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 + aq^4|}{g(2)q^4}.$$

因为当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他的零点, 而 $\frac{p}{q} \neq x_0$, 故 $f(\frac{p}{q}) \neq 0$.

又因为 p, q, a 均为整数, 所以 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 + aq^4|$ 是正整数,

从而 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 + aq^4| \geq 1$.

所以 $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{g(2)q^4}$. 所以, 只要取 $A = g(2)$, 就有 $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{Aq^4}$.