绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 5 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1.每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2.本卷共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

参考公式：

• 如果事件 *A*，*B* 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

• 棱柱的体积公式 $V=Sh$. 其中 S 表示棱柱的底面面积，h 表示棱柱的高.

• 球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.其中 R 表示球的半径.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设集合 $A=\{1,2,6\},B=\{2,4\},C=\{1,2,3,4\}$，则 $(A\cup B)\cap C=$

（A）$\{2\}$（B）$\{1,2,4\}$（C）$\{1,2,4,6\}$（D）$\{1,2,3,4,6\}$

（2）设 $x\in\mathbf{R}$，则“$2-x\geq 0$”是“$|x-1|\leq 1$”的

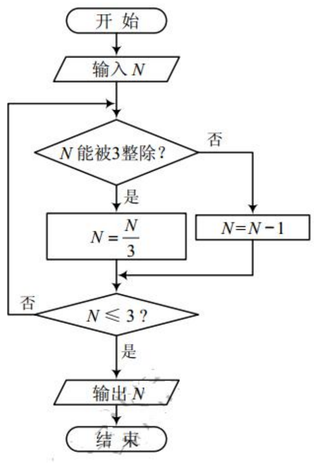
（A）充分而不必要条件（B）必要而不充分条件

（C）充要条件（D）既不充分也不必要条件

（3）有 5 支彩笔（除颜色外无差别），颜色分别为红、黄、蓝、绿、紫.从这 5 支彩笔中任取 2 支不同颜色的彩笔，则取出的 2 支彩笔中含有红色彩笔的概率为

（A）$\frac{4}{5}$（B）$\frac{3}{5}$（C）$\frac{2}{5}$（D）$\frac{1}{5}$

（4）阅读右面的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 19，则输出 N 的值为



（A）0 （B）1（C）2（D）3

（5）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，点 A 在双曲线的渐近线上，$\triangle OAF$ 是边长为 2 的等边三角形（O 为原点），则双曲线的方程为

（A）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$（B）$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$（C）$\frac{x^2}{3}-y^2=1$（D）$x^2-\frac{y^2}{3}=1$

（6）已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.若 $a=-f(\log_2\frac{1}{5}),b=f(\log_2 4.1),c=f(2^{0.8})$，则 a,b,c 的大小关系为

（A）$a<b<c$（B）$b<a<c$（C）$c<b<a$（D）$c<a<b$

（7）设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi),x\in\mathbf{R}$，其中 $\omega>0,|\varphi|<\pi$.若 $f(\frac{5\pi}{8})=2,f(\frac{11\pi}{8})=0,$ 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则

（A）$\omega=\frac{2}{3},\varphi=\frac{\pi}{12}$（B）$\omega=\frac{2}{3},\varphi=-\frac{11\pi}{12}$（C）$\omega=\frac{1}{3},\varphi=-\frac{11\pi}{24}$（D）$\omega=\frac{1}{3},\varphi=\frac{7\pi}{24}$

（8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|+2,x<1,\\ x+\frac{2}{x},x\geq 1.\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geq|\frac{x}{2}+a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是

（A）$[-2,2]$（B）$[-2\sqrt{3},2]$（C）$[-2,2\sqrt{3}]$（D）$[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共 12 小题，共 110 分。

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

（9）已知 $a\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数，则 a 的值为 ．

（10）已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图象在点（1，$f(1)$）处的切线为 l，则 l 在 y 轴上的截距为 ．

（11）已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为 18，则这个球的体积为 ．

（12）设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，学 科&网准线为 l.已知点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A.若 $\angle FAC=120°$，则圆的方程为 ．

（13）若 a，$b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为 ．

（14）在△ABC 中，$\angle A=60°$，AB=3，AC=2.若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则 λ 的值为 ．

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（15）（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c．已知 $a\sin A=4b\sin B$，$ac=\sqrt{5}(a^2-b^2-c^2)$．

（Ⅰ）求 $\cos A$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin(2B-A)$ 的值.

（16）（本小题满分 13 分）

电视台播放甲、乙两套连续剧，每次播放连续剧时，需要播放广告.已知每次播放甲、乙两套连续剧时，连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示：

	连续剧播放时长（分钟）	广告播放时长（分钟）	收视人次（万）
甲	70	5	60

乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟，广告的总播放时间不少于 30 分钟，且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍.分别用 x，学&科网 y 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

（I）用 x， y 列出满足题目条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

（II）问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次，才能使收视人次最多？

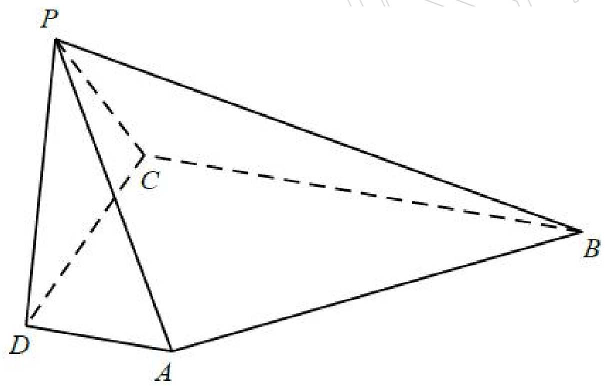
（17）（本小题满分 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD\perp$ 平面 PDC， $AD//BC$， $PD\perp PB$， $AD=1$， $BC=3$， $CD=4$， $PD=2$.

（I）求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值；

（II）求证： $PD\perp$ 平面 PBC；

（III）求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



（18）（本小题满分 13 分）

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$， $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，

$b_2+b_3=12,b_3=a_4-2a_1,S_{11}=11b_4$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

（19）（本小题满分 14 分）

设 $a,b\in\mathbf{R}$， $|a|\le 1$.已知函数 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$， $g(x)=e^x f(x)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）已知函数 $y=g(x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象在公共点（x_0，y_0）处有相同的切线，

（i）求证：$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0；

（ii）若关于 x 的不等式 $g(x)\le \mathrm{e}^x$ 在区间 $[x_0-1,x_0+1]$ 上恒成立，求 b 的取值范围.

（20）（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$，右顶点为 A，点 E 的坐标为 $(0,c)$，$\triangle EFA$ 的面积为 $\dfrac{b^2}{2}$.

（I）求椭圆的离心率；

（II）设点 Q 在线段 AE 上，$|FQ|=\dfrac{3}{2}c$，延长线段 FQ 与椭圆交于点 P，点 M，N 在 x 轴上，$PM\,//\,QN$，且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c，四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.

（i）求直线 FP 的斜率；

（ii）求椭圆的方程.

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）答案

（1）B　（2）B　（3）C　（4）C

（5）D　（6）C　（7）A　（8）A

（9）−2　（10）1　（11）$\frac{9\pi}{2}$

（12）$(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$　（13）4　（14）$\frac{3}{11}$

（15）（Ⅰ）解：由 $a\sin A=4b\sin B$，及 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $a=2b$.

由 $ac=\sqrt{5}(a^2-b^2-c^2)$，及余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}ac}{ac}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ），可得 $\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，代入 $a\sin A=4b\sin B$，得 $\sin B=\frac{a\sin A}{4b}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

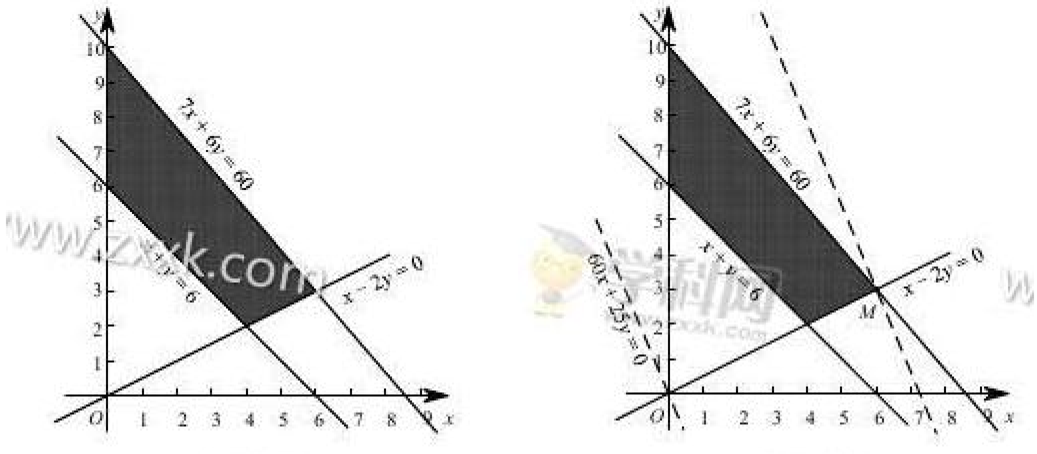
由（Ⅰ）知，A 为钝角，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 于是 $\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{4}{5}$，

$\cos 2B=1-2\sin^2 B=\frac{3}{5}$，故

$$\sin(2B-A)=\sin 2B\cos A-\cos 2B\sin A=\frac{4}{5}\times(-\frac{\sqrt{5}}{5})-\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

16.（Ⅰ）解：由已知，x,y 满足的数学关系式为 $\begin{cases}70x+60y\le 600,\\5x+5y\ge 30,\\x\le 2y,\\x\ge 0,\\y\ge 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}7x+6y\le 60,\\x+y\ge 6,\\x-2y\le 0,\\x\ge 0,\\y\ge 0,\end{cases}$

该二元一次不等式组所表示的平面区域为图 1 中的阴影部分：



（图 1）　　（图 2）

（Ⅱ）解：设总收视人次为 z 万，则目标函数为 $z=60x+25y$.

考虑 $z=60x+25y$，将它变形为 $y=-\frac{12}{5}x+\frac{z}{25}$，这是斜率为 $-\frac{12}{5}$，随 z 变化的一族平行直线. $\frac{z}{25}$ 为直线在 y 轴上的截距，当 $\frac{z}{25}$ 取得最大值时，z 的值最大.又因为 x,y 满足约束条件，所以由图 2 可知，当直线 $z=60x+25y$ 经过可行域上的点 M 时，截距 $\frac{z}{25}$ 最大，即 z 最大.

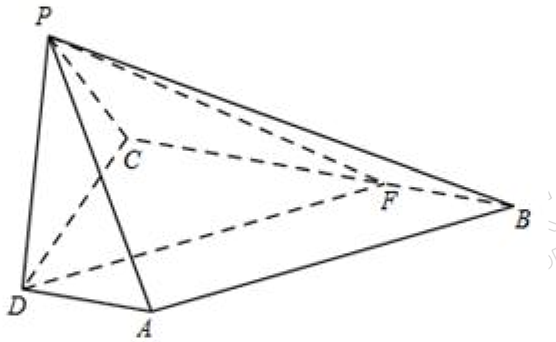
解方程组 $\begin{cases}7x+6y=60,\\ x-2y=0,\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $(6,3)$.

所以，电视台每周播出甲连续剧 6 次、乙连续剧 3 次时才能使总收视人次最多.

（17）本小题主要考查两条异面直线所成的角、直线与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识.考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力.满分 13 分.

（Ⅰ）解：如图，由已知 AD//BC，学|科网故 $\angle DAP$ 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角.因为 AD⊥平面 PDC，所以 AD⊥PD.在 Rt△PDA 中，由已知，得 $AP=\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{5}$，故 $\cos\angle DAP=\frac{AD}{AP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以，异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



（Ⅱ）证明：因为 $AD\perp$ 平面 PDC，直线 $PD\subset$ 平面 PDC，所以 $AD\perp PD$.又因为 $BC//AD$，所以 $PD\perp BC$，又 $PD\perp PB$，所以 $PD\perp$ 平面 PBC.

（Ⅲ）解：过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F，连结 PF，则 DF 与平面 PBC 所成的角等于 AB 与平面 PBC 所成的角.

因为 $PD\perp$ 平面 PBC，故 PF 为 DF 在平面 PBC 上的射影，所以 $\angle DFP$ 为直线 DF 和平面 PBC 所成的角.

由于 $AD//BC$，$DF//AB$，故 $BF=AD=1$，由已知，得 $CF=BC-BF=2$.又 $AD\perp DC$，故 $BC\perp DC$，在 Rt$\triangle DCF$ 中，可得 $DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=2\sqrt{5}$,在 Rt$\triangle DPF$ 中，可得 $\sin\angle DFP=\dfrac{PD}{DF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以，直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

18.（Ⅰ）解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.由已知 $b_2+b_3=12$，得 $b_1(q+q^2)=12$，而 $b_1=2$，所以 $q^2+q-6=0$.又因为 $q>0$，解得 $q=2$.所以，$b_n=2^n$.

由 $b_3=a_4-2a_1$，可得 $3d-a_1=8$①.由 $S_{11}=11b_4$，可得 $a_1+5d=16$②，联立①②，解得 $a_1=1,d=3$，由此可得 $a_n=3n-2$.

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-2$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$.

（Ⅱ）解：设数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，由 $a_{2n}=6n-2$，有

$T_n=4\times2+10\times2^2+16\times2^3+\cdots+(6n-2)\times2^n$，

$2T_n=4\times2^2+10\times2^3+16\times2^4+\cdots+(6n-8)\times2^n+(6n-2)\times2^{n+1}$，

上述两式相减，得 $-T_n=4\times2+6\times2^2+6\times2^3+\cdots+6\times2^n-(6n-2)\times2^{n+1}$

$=\dfrac{12\times(1-2^n)}{1-2}-4-(6n-2)\times2^{n+1}=-(3n-4)2^{n+2}-16$.

得 $T_n=(3n-4)2^{n+2}+16$.

所以，数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和为 $(3n-4)2^{n+2}+16$.

19.【解析】(I) 由 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$，可得

$f'(x)=3x^2-12x-3a(a-4)=3(x-a)(x-(4-a))$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$，或 $x=4-a$.由 $|a|\le 1$，得 $a<4-a$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,a)$	$(a,4-a)$	$(4-a,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

所以，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,a)$，$(4-a,+\infty)$，单调递减区间为 $(a,4-a)$.

(II)(i) 因为 $g'(x)=\mathrm{e}^x(f(x)+f'(x))$，由题意知 $\begin{cases} g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0} \\ g'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0} \end{cases}$，

所以 $\begin{cases} f(x_0)\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0} \\ \mathrm{e}^{x_0}(f(x_0)+f'(x_0))=\mathrm{e}^{x_0} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} f(x_0)=1 \\ f'(x_0)=0 \end{cases}$.

所以，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0.

(ii) 因为 $g(x)\le \mathrm{e}^x$，$x\in[x_0-1,x_0+1]$，由 $\mathrm{e}^x>0$，可得 $f(x)\le 1$.

又因为 $f(x_0)=1$，$f'(x_0)=0$，故 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，由 (I) 知 $x_0=a$.

另一方面，由于 $|a|\le 1$，故 $a+1<4-a$，

由 (I) 知 $f(x)$ 在 $(a-1,a)$ 内单调递增，在 $(a,a+1)$ 内单调递减，

故当 $x_0=a$ 时，$f(x)\le f(a)=1$ 在 $[a-1,a+1]$ 上恒成立，从而 $g(x)\le \mathrm{e}^x$ 在 $[x_0-1,x_0+1]$ 上恒成立.

由 $f(a)=a^3-6a^2-3a(a-4)a+b=1$，得 $b=2a^3-6a^2+1$，$-1\le a\le 1$.

令 $t(x)=2x^3-6x^2+1$，$x\in[-1,1]$，所以 $t'(x)=6x^2-12x$，

令$t'(x)=0$，解得$x=2$（舍去），或$x=0$.

因为$t(-1)=-7$，$t(1)=-3$，$t(0)=1$，故$t(x)$的值域为$[-7,1]$.

所以，b的取值范围是$[-7,1]$.

(20)（Ⅰ）解：设椭圆的离心率为 e.由已知，可得$\frac{1}{2}(c+a)c=\frac{b^2}{2}$.又由$b^2=a^2-c^2$，可得$2c^2+ac-a^2=0$，即$2e^2+e-1=0$.又因为$0<e<1$，解得$e=\frac{1}{2}$.

所以，椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）（ⅰ）依题意，设直线 FP 的方程为$x=my-c(m>0)$，则直线 FP 的斜率为$\frac{1}{m}$.

由（Ⅰ）知$a=2c$，可得直线 AE 的方程为$\frac{x}{2c}+\frac{y}{c}=1$，即$x+2y-2c=0$，与直线 FP 的方程联立，可解得$x=\frac{(2m-2)c}{m+2},y=\frac{3c}{m+2}$，即点 Q 的坐标为$(\frac{(2m-2)c}{m+2},\frac{3c}{m+2})$.

由已知|FQ|=$\frac{3c}{2}$，有$[\frac{(2m-2)c}{m+2}+c]^2+(\frac{3c}{m+2})^2=(\frac{3c}{2})^2$，整理得$3m^2-4m=0$，所以$m=\frac{4}{3}$，即直线 FP 的斜率为$\frac{3}{4}$.

(ⅱ) 解：由$a=2c$，可得$b=\sqrt{3}c$，故椭圆方程可以表示为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$.

由（ⅰ）得直线 FP 的方程为$3x-4y+3c=0$，与椭圆方程联立$\begin{cases}3x-4y+3c=0,\\ \frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1,\end{cases}$消去$y$，整理得$7x^2+6cx-13c^2=0$，解得$x=-\frac{13c}{7}$（舍去），学.科网或$x=c$.因此可得点$P(c,\frac{3c}{2})$，进而可得$|FP|=\sqrt{(c+c)^2+(\frac{3c}{2})^2}=\frac{5c}{2}$，所以$|PQ|=|FP|-|FQ|=\frac{5c}{2}-\frac{3c}{2}=c$.由已知，线段$PQ$的长即为$PM$与$QN$这两条平行直线间的距离，故直线$PM$和$QN$都垂直于直线$FP$.

因为$QN\perp FP$，所以$|QN|=|FQ|\cdot\tan\angle QFN=\frac{3c}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{9c}{8}$，所以$\triangle FQN$的面积为

$\frac{1}{2}|FQ||QN|=\frac{27c^2}{32}$，同理$\triangle FPM$的面积等于$\frac{75c^2}{32}$，由四边形$PQNM$的面积为$3c$，

得$\frac{75c^2}{32}-\frac{27c^2}{32}=3c$，整理得$c^2=2c$，又由$c>0$，得$c=2$.

所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.