2018年高中毕业年级第一次质量预测

理科数学　参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	D	C	C	B	A	B	D	D	C	A

二、填空题

13. -1；　14. $\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$；　15. $\dfrac{12}{35}$；　16. $y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}x$.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 解析：（1）$\begin{cases}\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_5=2\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{d}=25\\ \boldsymbol{S}_5=5\boldsymbol{a}_3=5\boldsymbol{a}_1+10\boldsymbol{d}=55\end{cases}$，求得

$\begin{cases}a_1=5,\\ d=3,\end{cases}\therefore a_n=3n+2.$ …………… 6分

（2）

$$b_n=\frac{1}{a_n(3n-1)}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$ …………… 8分

$$T_n=b_1+b_2+\cdots b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right),$$

$$\therefore T_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{9n+6}=\frac{n}{2(3n+2)}$$ …………… 12分

18. 解析：（1）由题意 $\dfrac{105+107+113+115+119+126+(120+\boldsymbol{x})+132+134+141}{10}=122$，

解得 $\boldsymbol{x}=8$； …………… 4分

（2）随机变量η的所有取值有0,1,2,3,4.

$$p(\eta=0)=\frac{C_7^2C_6^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{7}{45};\qquad p(\eta=1)=\frac{C_7^1C_3^1C_6^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{91}{225};$$

$$p(\eta=2)=\frac{C_3^2C_6^2+C_7^2C_4^2+C_7^1C_3^1C_6^1C_4^1}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{1}{3};$$

$$p(\eta=3)=\frac{C_3^2C_6^1C_4^1+C_7^1C_3^1C_4^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{22}{225};$$

$$p(\eta=4)=\frac{C_3^2C_4^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{2}{225};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9\text{ 分}$$

$\therefore \eta$ 的分布列为：

η	0	1	2	3	4
P	$\frac{7}{45}$	$\frac{91}{225}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{225}$	$\frac{2}{225}$

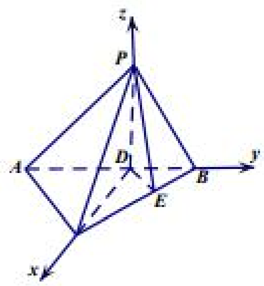
$$E(\eta)=0\times\frac{7}{45}+1\times\frac{91}{225}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{22}{225}+4\times\frac{2}{225}=\frac{7}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

12 分

19.（1）证明：连接 DE，由题意知 $AD=4, BD=2,$

$\because AC^2+BC^2=AB^2, \therefore \angle ACB=90^\circ.$

$\cos\angle ABC=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$



$\therefore CD^2=2^2+12-2\times2\times2\sqrt{3}\cos\angle ABC=8.$

$\therefore CD=2\sqrt{2}.$

$\therefore \boldsymbol{CD}^2+\boldsymbol{AD}^2=\boldsymbol{AC}^2$，则 $\boldsymbol{CD}\perp\boldsymbol{AB}$，……………… 2 分

又因为平面 $\boldsymbol{PAB}\perp$ 平面 $\boldsymbol{ABC}$，所以 $\boldsymbol{CD}\perp$ 平面 $\boldsymbol{PAB}$，$\therefore \boldsymbol{CD}\perp\boldsymbol{PD}$，

因为 $\boldsymbol{PD}\perp\boldsymbol{AC}$， $\boldsymbol{AC},\boldsymbol{CD}$ 都在平面 $\boldsymbol{ABC}$ 内，

所以 $\boldsymbol{PD}\perp$ 平面 $\boldsymbol{ABC}$ ；……………… 4 分

（2）由（1）知 PD, CD, AB 两两互相垂直，建立如图所示的直角坐标系 $D-xyz$，

且 PA 与平面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，有 $\boldsymbol{PD}=4$，

则 $\boldsymbol{A}(0,-4,0), \boldsymbol{C}(2\sqrt{2},0,0), \boldsymbol{B}(0,2,0), \boldsymbol{P}(0,0,4)$

$\therefore \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}=(-2\sqrt{2},2,0), \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}=(2\sqrt{2},4,0), \overrightarrow{\boldsymbol{PA}}=(0,-4,-4)$

因为 $\boldsymbol{AD}=2\boldsymbol{DB}, \boldsymbol{CE}=2\boldsymbol{EB}, \therefore \boldsymbol{DE}\parallel\boldsymbol{AC}$，

由（1）知 $AC\perp BC$, $PD\perp$平面 ABC，$\therefore$ $CB\perp$平面 DEP .... 8 分

$\therefore \overrightarrow{CB}=(-2\sqrt{2},2,0)$ 为平面 DEP 的一个法向量.

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AC},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{PA},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}2\sqrt{2}x+4y=0\\ -4y-4z=0\end{cases}$，令 $z=1$，则 $x=\sqrt{2}, y=-1$， .... 10 分

$\therefore \vec{n}=(\sqrt{2},-1,1)$ 为平面 PAC 的一个法向量.

$\therefore \cos<\vec{n},\overrightarrow{CB}>=\dfrac{-4-2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{12}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故平面 PAC 与平面 PDE 的锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以平面 PAC 与平面 PDE 的锐二面角为 30° .... 12 分

20. 解析：（1）由题意 $\dfrac{|-\sqrt{3}ab|}{\sqrt{a^2+4b^2}}=c$，即 $3a^2b^2=c^2(a^2+4b^2)=(a^2-b^2)(a^2+4b^2)$.

所以 $a^2=2b^2$，$\therefore e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .... 4 分

（2）因为三角形 ΔPQF_2 的周长为 $4\sqrt{2}$，所以 $4a=4\sqrt{2}, \therefore a=\sqrt{2}$,

由（1）知 $b^2=1$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，且焦点 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$，

①若直线 l 斜率不存在，则可得 $l\perp x$ 轴，方程为 $x=-1, P(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}), Q(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

$\overrightarrow{F_2P}=(-2,\dfrac{\sqrt{2}}{2}), \overrightarrow{F_2Q}=(-2,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，故 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=\dfrac{7}{2}$ .... 6 分

②若直线 l 斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$……………8分

$\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=(x_1-1,y_1)\cdot(x_2-1,y_2)=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2$,

则 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=(k^2+1)x_1x_2+(k^2-1)(x_1+x_2)+k^2+1$.

代入韦达定理可得 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=(k^2+1)\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}+(k^2-1)(-\dfrac{4k^2}{2k^2+1})+k^2+1=\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{9}{2(2k^2+1)}$,

由 $k^2>0$ 可得 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}\in(-1,\dfrac{7}{2})$，结合当 k 不存在时的情况，得 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}\in(-1,\dfrac{7}{2}]$,

所以 $\overrightarrow{\boldsymbol{F_2P}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{F_2Q}}$ 最大值是 $\dfrac{7}{2}$……………12分

21. 解析：（1）$f'(x)=\dfrac{ax-1}{ax^2},(x>0)$

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调递增函数；

当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{ax-1}{ax^2}>0$，得 $x>\dfrac{1}{a}$，

$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{ax-1}{ax^2}}<0$，得 $0<\boldsymbol{x}<\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}$，

函数单调递增区间为 $(\dfrac{1}{\boldsymbol{a}},+\infty)$，减区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$.

综上所述，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 增区间为 $(0,+\infty)$..

当 $a>0$ 时，函数单调递增区间为 $(\dfrac{1}{\boldsymbol{a}},+\infty)$，减区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$.……………4分

（2）$\because \boldsymbol{x}\in[\dfrac{1}{\boldsymbol{e}},\boldsymbol{e}]$，函数 $\boldsymbol{g(x)=(\ln x-1)e^x+x-m}$ 的零点，

即方程 $(\ln\boldsymbol{x}-1)\boldsymbol{e^x}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{m}$ 的根.

令 $h(x)=(\ln x-1)\mathrm{e}^x+x$，$h'(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\ln x-1\right)\mathrm{e}^x+1$……………6分

由（1）知当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$ 在 $[\dfrac{1}{\boldsymbol{e}},1)$ 递减，在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递增，

$\therefore f(x)\geq f(1)=0$.

$\therefore \frac{1}{x}+\ln x-1\geq 0$ 在 $x\in[\frac{1}{e},e]$ 上恒成立.

$\therefore h'(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x-1\right)e^x+1\geq 0+1>0$，……………8 分

$\therefore h(x)=(\ln x-1)e^x+x$ 在 $x\in[\frac{1}{e},e]$ 上单调递增.

$\therefore h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-2e^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}$，$h(x)_{\max}=e$……….10 分

所以当 $m<-2e^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}$ 或 $m>e$ 时，没有零点，当 $-2e^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}\leq m\leq e$ 时有一个零点.……………12 分

22. (1) 直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t为参数）.

......2 分

$\because \rho=\frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta}$，$\therefore \rho\sin^2\theta=8\cos\theta, \therefore \rho^2\sin^2\theta=8\rho\cos\theta$, 即$y^2=8x$.

……5 分

（2）当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t为参数），

......6 分

代入 $y^2=8x$ 可得 $t^2-8\sqrt{2}t-16=0$,

设A、B两点对应的参数分别为t_1,t_2,则 $t_1+t_1=8\sqrt{2}$, $t_1\bullet t_2=-16$

$\therefore |AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1\bullet t_2}=8\sqrt{3}.$ ……8 分

又点O到直线AB的距离$d=1\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|AB|\times d=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}.$ ……10 分

23.（本小题满分 10 分）

解：(1)由已知，可得 $|x+3|<|2x-1|$,

即 $|x+3|^2<|2x-1|^2$. ……1 分

则有：$3x^2-10x-8>0$,

$\therefore x<-\frac{2}{3}$或$x>4$. ……3 分

故所求不等式的解集为:$(-\infty,-\frac{2}{3})\cup(4,+\infty)$. ……4 分

(2)由已知，设$h(x)=2f(x)+g(x)=2|x+3|+|2x-1|=\begin{cases}-4x-5,x\le -3,\\ 7,-3<x<\frac{1}{2},\\ 4x+5,x\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$ ……

6 分

当$x\le -3$时，只需$-4x-5>ax+4$恒成立,即$ax<-4x-9$,

$\because x\le -3<0$ $\therefore a>\frac{-4x-9}{x}=-4-\frac{9}{x}$恒成立.

$\therefore a>(-4-\frac{9}{x})_{\max},\therefore a>-1$, ……7 分

当$-3<x<\frac{1}{2}$时，只需$7>ax+4$恒成立,即$ax-3<0$恒成立.

只需$\begin{cases}-3a-3\le 0\\ \frac{1}{2}a-3\le 0\end{cases},\therefore\begin{cases}a\ge -1\\ a\le 6\end{cases},\therefore -1\le a\le 6$. ……8 分

当$x\ge\frac{1}{2}$时，只需$4x+5>ax+4$恒成立,即$ax<4x+1$.

$\because x\ge\frac{1}{2}>0$, $\therefore a<\frac{4x+1}{x}=4+\frac{1}{x}$恒成立.

$\because 4+\frac{1}{x}>4$, 且无限趋近于 4，

$\therefore a\le 4$. ……9 分

综上，a的取值范围是$(-1,4]$. ……10 分