

绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案

一、选择题

1. A 2. B 3. B 4. C 5. D 6. C
7. B 8. D 9. D 10. A 11. D 12. A

二、填空题

13. $2\sqrt{3}$ 14. -5 15. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 16. $4\sqrt{15}$

三、解答题

17. 解:

$$(1) \text{ 由题设得 } \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{a^2}{3 \sin A}, \text{ 即 } \frac{1}{2}c \sin B = \frac{a}{3 \sin A}.$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{1}{2} \sin C \sin B = \frac{\sin A}{3 \sin A}.$$

$$\text{故 } \sin B \sin C = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \text{ 由题设及 (1) 得 } \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } \cos(B+C) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } B+C = \frac{2\pi}{3}, \text{ 故 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{由题设得 } \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a^2}{3 \sin A}, \text{ 即 } bc = 8.$$

$$\text{由余弦定理得 } b^2 + c^2 - bc = 9, \text{ 即 } (b+c)^2 - 3bc = 9, \text{ 得 } b+c = \sqrt{33}.$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } 3 + \sqrt{33}.$$

18. 解:

$$(1) \text{ 由已知 } \angle BAP = \angle CDP = 90^\circ, \text{ 得 } AB \perp AP, CD \perp PD.$$

由于 $AB \parallel CD$, 故 $AB \perp PD$, 从而 $AB \perp$ 平面 PAD .

又 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

理科数学答案 第1页 (共5页)

(2) 在平面 PAD 内作 $PF \perp AD$ ，垂足为 F 。
由 (1) 可知， $AB \perp$ 平面 PAD ，故 $AB \perp PF$ ，
可得 $PF \perp$ 平面 $ABCD$ 。

以 F 为坐标原点， \overrightarrow{FA} 的方向为 x 轴正方向， $|\overrightarrow{AB}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$ 。

由 (1) 及已知可得 $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$ ， $P(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，
 $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0)$ ， $C(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0)$ 。

所以 $\overrightarrow{PC} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $\overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{PA} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ 。

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 是平面 PCB 的法向量，则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}x + y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0, \\ \sqrt{2}x = 0. \end{cases}$$

可取 $\mathbf{n} = (0, -1, -\sqrt{2})$ 。

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 是平面 PAB 的法向量，则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

可取 $\mathbf{m} = (1, 0, 1)$ 。

则 $\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

19. 解：

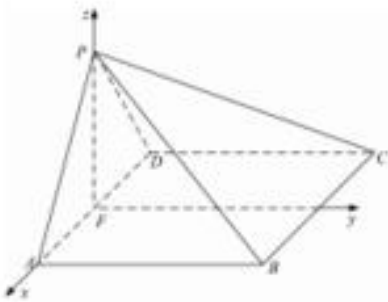
(1) 抽取的一个零件的尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之内的概率为 0.997 4，从而零件的尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的概率为 0.002 6，故 $X \sim B(16, 0.002 6)$ 。因此

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.997 4^{16} \approx 0.040 8。$$

X 的数学期望为 $EX = 16 \times 0.002 6 = 0.041 6$ 。

(2) (i) 如果生产状态正常，一个零件尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的概率只有 0.002 6，一天内抽取的 16 个零件中，出现尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的零件的概率只有 0.040 8，发生的概率很小。因此一旦发生这种情况，就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，可见上述监控生产过程的方法是合理的。

理科数学答案 第 2 页 (共 5 页)



(ii) 由 $\bar{x} = 9.97$, $s \approx 0.212$, 得 μ 的估计值为 $\hat{\mu} = 9.97$, σ 的估计值为 $\hat{\sigma} = 0.212$. 由样本数据可以看出有一个零件的尺寸在 $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$ 之外, 因此需对当天的生产过程进行检查.

剔除 $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$ 之外的数据 9.22, 剩下数据的平均数为

$$\frac{1}{15}(16 \times 9.97 - 9.22) = 10.02,$$

因此 μ 的估计值为 10.02.

$$\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 16 \times 0.212^2 + 16 \times 9.97^2 \approx 1591.134,$$

剔除 $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$ 之外的数据 9.22, 剩下数据的样本方差为

$$\frac{1}{15}(1591.134 - 9.22^2 - 15 \times 10.02^2) \approx 0.008,$$

因此 σ 的估计值为 $\sqrt{0.008} \approx 0.09$.

20. 解:

(1) 由于 P_3, P_4 两点关于 y 轴对称, 故由题设知 C 经过 P_3, P_4 两点.

又由 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2}$ 知, C 不经过点 P_1 , 所以点 P_2 在 C 上.

$$\text{因此 } \begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率分别为 k_1, k_2 .

如果 l 与 x 轴垂直, 设 $l: x = t$, 由题设知 $t \neq 0$, 且 $|t| < 2$, 可得 A, B 的坐标分别

为 $(t, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}), (t, -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2})$.

$$\text{则 } k_1 + k_2 = \frac{\sqrt{4-t^2}-2}{2t} - \frac{\sqrt{4-t^2}+2}{2t} = -1, \text{ 得 } t = 2, \text{ 不符合题设.}$$

从而可设 $l: y = kx + m (m \neq 1)$. 将 $y = kx + m$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得

$$(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0.$$

由题设可知 $\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0$.

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} \\ &= \frac{kx_1 + m - 1}{x_1} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2} \end{aligned}$$

理科数学答案 第3页 (共5页)

$$= \frac{2kx_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2)}{x_1x_2}.$$

由题设知 $k_1 + k_2 = -1$, 故 $(2k+1)x_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) = 0$.

$$\text{即 } (2k+1) \cdot \frac{4m^2-4}{4k^2+1} + (m-1) \cdot \frac{-8km}{4k^2+1} = 0.$$

$$\text{解得 } k = -\frac{m+1}{2}.$$

当且仅当 $m > -1$ 时, $\Delta > 0$, 于是 $l: y = -\frac{m+1}{2}x + m$, 即 $y+1 = -\frac{m+1}{2}(x-2)$,

所以 l 过定点 $(2, -1)$.

21. 解:

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1)(2e^x + 1)$.

(i) 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减.

(ii) 若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$.

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增.

(2) (i) 若 $a \leq 0$, 由 (1) 知, $f(x)$ 至多有一个零点.

(ii) 若 $a > 0$, 由 (1) 知, 当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为

$$f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a.$$

① 当 $a = 1$ 时, 由于 $f(-\ln a) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点;

② 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, 由于 $1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$, 即 $f(-\ln a) > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点;

③ 当 $a \in (0, 1)$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$.

又 $f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 有一个零点.

设正整数 n_0 满足 $n_0 > \ln(\frac{3}{a}-1)$, 则 $f(n_0) = e^{n_0}(ae^{n_0} + a - 2) - n_0 > e^{n_0} - n_0 > 2^{n_0} - n_0 > 0$.

由于 $\ln(\frac{3}{a}-1) > -\ln a$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 有一个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, 1)$.

22. 解:

(1) 曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

当 $a = -1$ 时, 直线 l 的普通方程为 $x + 4y - 3 = 0$.

$$\text{由 } \begin{cases} x + 4y - 3 = 0, \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{21}{25}, \\ y = \frac{24}{25}. \end{cases}$$

从而 C 与 l 的交点坐标为 $(3, 0)$, $(-\frac{21}{25}, \frac{24}{25})$.

(2) 直线 l 的普通方程为 $x+4y-a-4=0$ ，故 C 上的点 $(3\cos\theta, \sin\theta)$ 到 l 的距离为

$$d = \frac{|3\cos\theta + 4\sin\theta - a - 4|}{\sqrt{17}}.$$

当 $a \geq -4$ 时， d 的最大值为 $\frac{a+9}{\sqrt{17}}$ ，由题设得 $\frac{a+9}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$ ，所以 $a=8$ ；

当 $a < -4$ 时， d 的最大值为 $\frac{-a+1}{\sqrt{17}}$ ，由题设得 $\frac{-a+1}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$ ，所以 $a=-16$ 。

综上， $a=8$ 或 $a=-16$ 。

23. 解：

(1) 当 $a=1$ 时，不等式 $f(x) \geq g(x)$ 等价于

$$x^2 - x + |x+1| + |x-1| - 4 \leq 0. \quad ①$$

当 $x < -1$ 时，①式化为 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ ，无解；

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时，①式化为 $x^2 - x - 2 \leq 0$ ，从而 $-1 \leq x \leq 1$ ；

当 $x > 1$ 时，①式化为 $x^2 + x - 4 \leq 0$ ，从而 $1 < x \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 。

所以 $f(x) \geq g(x)$ 的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\}$ 。

(2) 当 $x \in [-1, 1]$ 时， $g(x)=2$ 。

所以 $f(x) \geq g(x)$ 的解集包含 $[-1, 1]$ ，等价于当 $x \in [-1, 1]$ 时 $f(x) \geq 2$ 。

又 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 的最小值必为 $f(-1)$ 与 $f(1)$ 之一，所以 $f(-1) \geq 2$ 且 $f(1) \geq 2$ ，得 $-1 \leq a \leq 1$ 。

所以 a 的取值范围为 $[-1, 1]$ 。