绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标III）

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

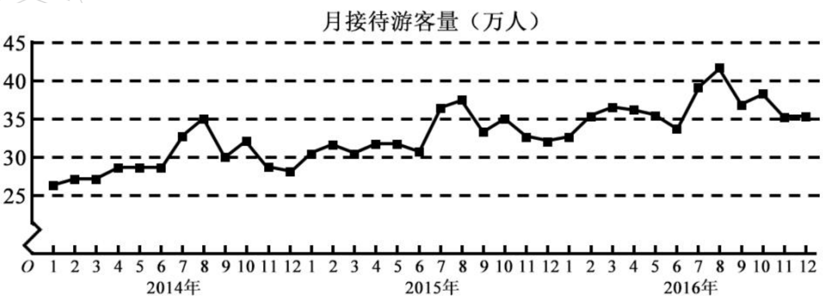
1．已知集合 $A=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2=1\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle| y=x\right\}$，则 $A\bigcap B$ 中元素的个数为

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

2．设复数 z 满足$(1+i)z=2i$，则$|z|=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

3．某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图．学#科&网



根据该折线图，下列结论错误的是

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在 7,8 月份

每个牛孩身后都有一个牛家长

D．各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

4．$(x+y)(2x-y)^5$的展开式中x^3y^3的系数为

A．-80　　B．-40　　C．40　　D．80

5．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$的一条渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，且与椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$有公共焦点，则 C 的方程为

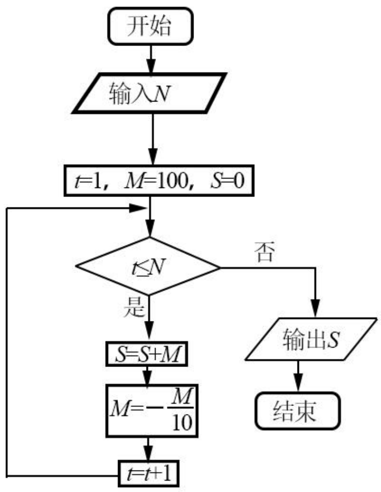
A．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　　C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

6．设函数 $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$，则下列结论错误的是

A．$f(x)$的一个周期为-2π　　B．$y=f(x)$的图像关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C．$f(x+\pi)$的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$　　D．$f(x)$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$单调递减

7．执行下面的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

8．已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为

A．π　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

9．等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差不为 0．若 a_2，a_3，a_6 成等比数列，则$\{a_n\}$前 6 项的和为

每个牛孩身后都有一个牛家长

A．-24　　B．-3　　C．3　　D．8

10．已知椭圆 *C*：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，（*a*>*b*>0）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 *C* 的离心率为

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

11．已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 *a*=

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

12．在矩形 ABCD 中，AB=1，AD=2，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为

A．3　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geq 0\\ x+y-2\leq 0\\ y\geq 0\end{cases}$，则 $z=3x-4y$ 的最小值为__________.

14．设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$, $a_1-a_3=-3$，则 $a_4=$ ____________.

15．设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 的 *x* 的取值范围是__________。

16．*a*，*b* 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 *ABC* 的直角边 *AC* 所在直线与 *a*，*b* 都垂直，斜边 *AB* 以直线 *AC* 为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线 *AB* 与 *a* 成 60°角时，*AB* 与 *b* 成 30°角；

②当直线 *AB* 与 *a* 成 60°角时，*AB* 与 *b* 成 60°角；

③直线 *AB* 与 *a* 所成角的最小值为 45°；

④直线 *AB* 与 *a* 所成角的最小值为 60°；

其中正确的是_________。（填写所有正确结论的编号）

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

每个牛孩身后都有一个牛家长

17. （12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，$b=2$.

（1）求 c；

（2）设 D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp AC$，求$\triangle ABD$ 的面积.

18. （12 分）

某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20，25），需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10，15）	[15，20）	[20，25）	[25，30）	[30，35）	[35，40）
天数	2	16	36	25	7	4

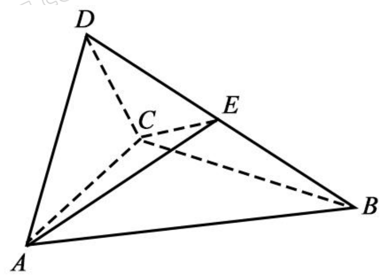
以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率。

（1）求六月份这种酸奶一天的需求量 X（单位：瓶）的分布列；

（2）设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元），当六月份这种酸奶一天的进货量 n（单位：瓶）为多少时，Y 的数学期望达到最大值？学科*网

19. （12 分）

如图，四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是正三角形，$\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=BD$.



（1）证明：平面 $ACD\perp$平面 ABC；

（2）过 AC 的平面交 BD 于点 E，若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分，求二面角 $D–AE–C$ 的余弦值.

20. （12 分）

已知抛物线 C：$y^2=2x$，过点（2,0）的直线 l 交 C 与 A,B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

每个牛孩身后都有一个牛家长

（1）证明：坐标原点 O 在圆 M 上；

（2）设圆 M 过点 P（4，-2），求直线 l 与圆 M 的方程.

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

（1）若 $f(x)\geq 0$，求 a 的值；

（2）设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\ldots(1+\frac{1}{2^n})<m$，求 m 的最小值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t,\\ y=kt,\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m,\\ y=\dfrac{m}{k},\end{cases}$（$m$为参数）. 设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为曲线 C.

（1）写出 C 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，设 l_3：$\rho(\cos\vartheta+\sin\vartheta)-\sqrt{2}=0$，$M$ 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径.

23．[选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.

（1）求不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\geq x^2-x+m$ 的解集非空，求 m 的取值范围.

每个牛孩身后都有一个牛家长

绝密★启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题正式答案

一、选择题

1.B　2.C　3.A　4.C　5.B　6.D

7.D　8.B　9.A　10.A　11.C　12.A

二、填空题

13. -1　14. -8　15. $(-\frac{1}{4},+\infty)$　16. ②③

三、解答题

17.解：

（1）由已知得 $\tan A=-\sqrt{3}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$

在 △ABC 中，由余弦定理得

$$28=4+c^2-4c\cos\frac{2\pi}{3}，即c^2+2c-24=0$$

解得 $c=-6$（舍去），$c=4$

（2）有题设可得 $\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=\frac{\pi}{6}$

故△ABD 面积与△ACD 面积的比值为 $\dfrac{\frac{1}{2}AB\bullet AD\bullet\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}AC\bullet AD}=1$

又△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times4\times2\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$，所以 ΔABD 的面积为 $\sqrt{3}$.

18.解：

（1）由题意知，X 所有的可能取值为 200,300,500，由表格数据知

$$P(X=200)=\frac{2+16}{90}=0.2$$

$$P(X=300)=\frac{36}{90}=0.4$$

$$P(X=500)=\frac{25+7+4}{90}=0.4.$$

每个牛孩身后都有一个牛家长

因此 X 的分布列为

X	200	300	500
P	0.2	0.4	0.4

⑵由题意知，这种酸奶一天的需求量至多为500，至少为200，因此只需考虑 $200\leqslant n\leqslant 500$

当 $300\leqslant n\leqslant 500$ 时，

若最高气温不低于25，则Y=6n-4n=2n

若最高气温位于区间 $[20,\ ,25)$，则Y=6×300+2（n-300）-4n=1200-2n;

若最高气温低于20，则Y=6×200+2（n-200）-4n=800-2n;

因此EY=2n×0.4+（1200-2n）×0.4+(800-2n) ×0.2=640-0.4n

当 $200\leqslant n<300$ 时，

若最高气温不低于20，则Y=6n-4n=2n;

若最高气温低于20，则Y=6×200+2（n-200）-4n=800-2n;

因此EY=2n×(0.4+0.4)+(800-2n)×0.2=160+1.2n

所以n=300时，Y的数学期望达到最大值，最大值为520元。

19.解：

（1）由题设可得，$\Delta ABD\cong\Delta CBD$,从而$AD=DC$

又 ΔACD 是直角三角形，所以 $\angle ACD$=90^0

取AC的中点O，连接DO,BO,则DO⊥AC,DO=AO

又由于 ΔABC是正三角形，故$BO\perp AC$

所以 $\angle DOB$为二面角$D-AC-B$的平面角

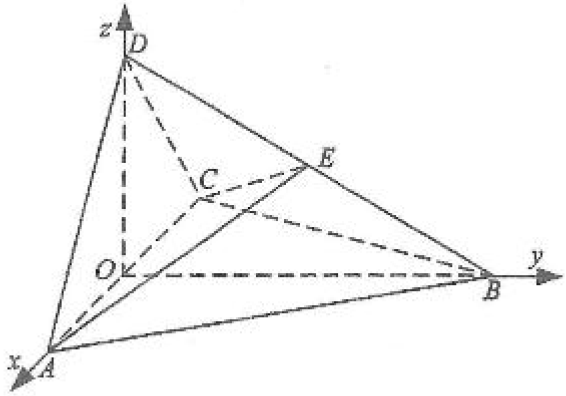
在$Rt\Delta AOB$中，$BO^2+AO^2=AB^2$

又$AB=BD$,所以

$BO^2+DO^2=BO^2+AO^2=AB^2=BD^2$，故∠DOB=90^0

所以平面$ACD\perp$平面ABC

（2）



每个牛孩身后都有一个牛家长

由题设及（1）知，OA, OB, OD 两两垂直，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴正方向，$\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，则

$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,0,0)$，$D(0,0,1)$

由题设知，四面体 ABCE 的体积为四面体 ABCD 的体积的 $\frac{1}{2}$，从而 E 到平面 ABC 的距离为 D 到平面 ABC 的距离的 $\frac{1}{2}$，即 E 为 DB 的中点，得 E $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.故

$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1),\overrightarrow{AC}=(-2,0,0),\overrightarrow{AE}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 DAE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+z=0\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 AEC 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\bullet\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\bullet\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 同理可得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{3})$

则 $cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

所以二面角 D-AE-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

20.解

（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),l:x=my+2$

由 $\begin{cases}x=my+2\\ y^2=2x\end{cases}$ 可得 $y^2-2my-4=0$, 则 $y_1y_2=-4$

又 $x_1=\frac{y_1^{\ 2}}{2},x_2=\frac{y_2^{\ 2}}{2}$, 故 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4}$=4

因此 OA 的斜率与 OB 的斜率之积为 $\frac{y_1}{x_1}\bullet\frac{y_2}{x_2}=\frac{-4}{4}$=-1

所以 OA⊥OB

每个牛孩身后都有一个牛家长

故坐标原点 O 在圆 M 上.

（2）由（1）可得 $y_1+y_2=2m, x_1+x_2=m\left(y_1+y_2\right)+4=2m^2+4$

故圆心 M 的坐标为 $\left(m^2+2，m\right)$，圆 M 的半径 $r=\sqrt{\left(m^2+2\right)^2+m^2}$

由于圆 M 过点 P（4，-2），因此 $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=0$,故 $\left(x_1-4\right)\left(x_2-4\right)+\left(y_1+2\right)\left(y_2+2\right)=0$

即 $x_1x_2-4\left(x_1+x_2\right)+y_1y_2+2\left(y_1+y_2\right)+20=0$

由（1）可得 $y_1y_2=-4，x_1x_2=4$，

所以 $2m^2-m-1=0$，解得 $m=1或m=-\dfrac{1}{2}$.

当 m=1 时，直线 l 的方程为 x-y-2=0，圆心 M 的坐标为（3,1），圆 M 的半径为 $\sqrt{10}$，圆 M 的方程为 $\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2=10$

当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $2x+y-4=0$，圆心 M 的坐标为 $\left(\dfrac{9}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$，圆 M 的半径为 $\dfrac{\sqrt{85}}{4}$，圆 M 的方程为 $\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{85}{16}$

21.解：（1）$f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$.

①若 $a\leq 0$，因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+a\ln 2<0$，所以不满足题意；

②若 $a>0$，由 $f'\left(x\right)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$ 知，当 $x\in\left(0,a\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(a,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,a\right)$ 单调递减，在 $\left(a,+\infty\right)$ 单调递增，故 x=a 是 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 的唯一最小值点.

由于 $f\left(1\right)=0$，所以当且仅当 a=1 时，$f\left(x\right)\geq 0$.

故 a=1

（2）由（1）知当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$x-1-\ln x>0$

令 $x=1+\dfrac{1}{2^n}$ 得 $\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<\dfrac{1}{2^n}$，从而

$$ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$$

故$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$

而$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)>2$，所以 m 的最小值为 3.

22.解：

（1）消去参数 t 得 l_1 的普通方程 $l_1: y=k(x-2)$；消去参数 m 得 l_2 的普通方程

$l_2: y=\frac{1}{k}(x+2)$

设 P（x,y），由题设得$\begin{cases}y=k(x-2)\\ y=\frac{1}{k}(x+2)\end{cases}$，消去 k 得 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$.

所以 C 的普通方程为 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$

（2）C 的极坐标方程为$r^2(cos^2q-sin^2q)=4(0<q<2p,q\neq p)$

联立$\begin{cases}r^2(cos^2q-sin^2q)=4\\ r(cosq+sinq)-\sqrt{2}=0\end{cases}$得 $cosq-sinq=2(cosq+sinq)$.

故 $tanq=-\frac{1}{3}$，从而 $cos^2q=\frac{9}{10},sin^2q=\frac{1}{10}$

代入$r^2(cos^2q-sin^2q)=4$得$r^2=5$，所以交点 M 的极径为$\sqrt{5}$.

23.解：

（1）$f(x)=\begin{cases}-3, & x<-1\\ 2x-1, & -1\le x\le 2\\ 3, & x>2\end{cases}$

当 $x<-1$ 时，$f(x)\ge 1$ 无解；

当 $-1\le x\le 2$ 时，由 $f(x)\ge 1$ 得，$2x-1\ge 1$，解得 $1\le x\le 2$

当 $x>2$ 时，由 $f(x)\ge 1$ 解得 $x>2$.

所以 $f(x)\ge 1$ 的解集为 $\{x|x\ge 1\}$.

每个牛孩身后都有一个牛家长

（2）由 $f(x)\geq x^2-x+m$ 得 $m\leq|x+1|-|x-2|-x^2+x$，而

$$|x+1|-|x-2|-x^2+x\leq|x|+1+|x|-2-x^2+|x|$$

$$=-\left(|x|-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$$\leq\frac{5}{4}$$

且当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$|x+1|-|x-2|-x^2+x=\frac{5}{4}$.

故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$